Dieter Röß dieter.roess@t-online.de 25.7.2016

Wie genau gingen die großen Foliot- Turmuhren (*Spindel mit Waag*) des Mittelalters? Eine experimentelle Untersuchung

Dieter Röß

Zusammenfassung

Die großen Waaguhren des frühen Mittelalters werden allgemein als sehr ungenau eingeschätzt, mit täglichen Schwankungen von 15 Minuten, ohne dass dafür Belege vorliegen. Für eine 1478 datierte, rekonstruierte Waaguhr wurden vom Autor deutlich geringere Abweichungen ermittelt. An einem Neubau mit gleichen Abmessungen sollte mit moderner Messtechnik die Funktion einer Waaguhr im „Neuzustand" experimentell untersucht werden.

Bei etwa konstanter Temperatur betrug für maximalem Eingriff (minimalem *Fall*) die mittlere Schwankung pro Stunde weniger als 1 Sekunde; die tägliche Abweichung von der Sollzeit 15 Sekunden. Der Waagausschlag betrug dabei ≥ 180 Grad. Bei mäßig wechselnder Temperatur betrug die maximale Abweichung von der Sollzeit bei einer Laufzeit von 11 Tagen ± 2 Minuten.

Die Temperaturabhängigkeit der Reibung zwischen Kronradzähnen und Spindellappen erwies sich als größter, nicht kompensierbarer Störfaktor, mit rund einer Minute pro Grad und Tag bei maximalem Eingriff. Mit vermindertem Eingriff reduziert sich die Temperaturabhängigkeit auf 15 Sekunden pro Grad und Tag, bei einem Waagausschlag von ±165 Grad. Periodische Temperaturschwankungen (z.B. Tag und Nacht) werden sehr gut ausgemittelt.

Die Waagfrequenz erwies sich als proportional zur Wurzel aus dem Quotienten von Antriebsgewicht und Trägheitsmoment der Waag. Unabhängig vom Startwinkel entwickelt sich der Ausschlagwinkel aus einem Gleichgewicht zwischen überschießendem kontinuierlichem Antrieb und einmaligem Bremsimpuls beim Fall und ist abhängig von der Tiefe des Eingriffs.

Time Keeping Quality of Medieval *verge and folio*t Turret Clocks - Experimental Study

Summary

Medieval turret clocks with verge and foliot escapement are generally believed to have been miserable time keepers, with daily variations of 15 minutes. With a reconstructed clock dated 1478 the author observed much better results. It was decided to design a new clock of similar dimensions to study verge and foliot function in "virgin state".

With about constant temperature and maximum engagement depth (swing ≥ ± 180 degrees) hourly variations were below 1 second, daily deviation from standard time about 15 seconds. With moderately changing temperature the maximum deviation from standard time over a period of 11 days was ± 2 minutes.

Temperature dependence of friction between the foliot pallets and the crown wheel teeth is a major, non compensable external interference factor to the momentary oscillation frequency. At higher temperature the clock runs faster, at a rate of about one minute per degree and day for maximum engagement. With moderate engagement (swing ± 165 degrees) the clock becomes less temperature sensitive, with about 15 seconds per degree and day. Periodic temperature variations (e.g. day and night) average out are very well.

The foliot frequency is proportional to the square root of the ratio between driving weight and torsional moment of foliot and verge. Independent of initial condition a constant swing amplitude develops as an equilibrium between excess acceleration at the verge pallets and the retarding action of *fall*; hence is depends on the depth of engagement.

Dieter Röß dieter.roess@t-online.de 25.7.2016

Wie genau gingen die großen Foliot- Turmuhren (*Spindel mit Waag*) des Mittelalters?[1]

Dieter Röß[2]

1.) Was ist über die Genauigkeit der Waaguhren bekannt?

Die Spindelhemmung ist der älteste Mechanismus zum digitalen Zählen von Zeitintervallen. in rein mechanischen Uhren. Etwa seit 1300 wurde sie in Turmuhren verwendet[3], mit dem horizontal hin und her schwingenden Waagbalken als Trägheitsmasse. Verschiebbare Gewichte auf dem Waagbalken dienten zur Feinregulierung der ansonsten vom Antriebsgewicht abhängigen Schwingungsperiode.

Aus ihrer Verwendungszeit sind keine Theorie dieser Uhrwerke und keine belastbaren Aussagen über die erreichte Genauigkeit überliefert. Heute in Museen ausgestellte Turm- Waaguhren sind wohl fast ausschließlich Rückbauten von gegen 1700 umgebauten und als Spindeluhr mit Pendel überlieferten Werken. Auch von diesen halboriginalen Uhren fand ich keine Messprotokolle, die ihre Reproduzierbarkeit und Genauigkeit belegen.

Übereinstimmend wird in der Literatur behauptet dass Waaguhren sehr primitive Zeitmesser waren, mit einer täglicher Fehler von ±15 Minuten, ohne dass ich eine Ursprungsquelle für diese anscheinend von Autor zu Autor weitergereichte Aussage fand.

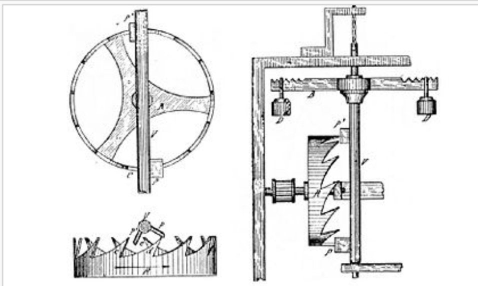
Die folgenden Zitate kennzeichnen denn Stand der Meinungen (2015):

http://de.wikipedia.org/wiki/Foliot

Foliot

Der Titel dieses Artikels ist mehrdeutig. Zum englischen Bischof siehe Gilbert Foliot.

Das **Foliot** (*zitterndes Blatt* [1]; deutsch: *Waag*, *Balkenwaag* oder *Löffelwaag* [2]) ist Teil des ältesten, seit etwa 1300 in einer Räderuhr verwendeten Mechanismus, mit dem annähernd ein gleichmäßiger Gang erreicht wird (vgl. Gangregler).



Foliot mit versetzbaren Gewichten, Spindel (mit 2 Lappen), Kronrad

Zu ihm gehören neben dem waagerecht angeordneten Foliot die Welle (*Spindel*), die mit dem Foliot dreht, und die beiden an ihr befestigten Lappen, die zwischen die Zähne des *Kronrads* eingreifen. Das Kronrad (Hemmungsrad) ist das am schnellsten drehende Rad der Uhr. Seine Drehgeschwindigkeit bestimmt deren Gang. Ohne Hemmung durch den Foliot-Mechanismus würde die Uhr zu schnell und ungleichmäßig gehen. Durch radial verschiebbare Gewichte kann das Trägheitsmoment des Balkens verändert und somit der Gang der Uhr reguliert werden.

Erst die Erfindung der Hemmung mit Foliot ermöglichte die mechanische Uhr. Ihre anderen Bauteile, Gewichtsantrieb, Zahnräder und drehende Zeiger, waren vorher schon bekannt.

Das vom Antrieb über das Kronrad und über die an der Spindel befindlichen Lappen grob hin und her gedrehte Foliot ist kein System mit Eigenschwingungsfähigkeit und kann nicht isochron arbeiten.[3] Eine Uhr mit Foliot war bestenfalls auf 15 Minuten pro Tag genau. Die Konstruktion mit Foliot zeichnete aber den Weg für die Verwendung eines mechanischen Schwingers vor, dessen Schwingungsdauer bei freier Schwingung eine konstante Größe ist, und der allein den Takt der Uhr bestimmt. Das Foliot wurde Mitte des 17. Jahrhunderts vom mechanischen Pendel abgelöst.

Eine Variante zum Balken war ein Rad, das **Unrast** genannt wurde und nicht zu verwechseln ist mit der Unruh, die zusammen mit einer Spiralfeder ein mechanischer Schwinger ist und später als das Pendel in Gebrauch kam.

---

[1] http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~roess/NichtSoWichtiges.htm

[2] http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~roess/, https://de.wikipedia.org/wiki/Dieter_R%C3%B6%C3%9F

[3] Dondi- Uhr 1344 im Turm des *Palazzo del Capitanio*

http://www.yellys.ch/service/tech4.html
Da bei der Bewegung der Waag keine Umwandlung zweier Energieformen stattfindet, ist sie zur Zeitmessung eigentlich ungeeignet. Die Schwingfrequenz ist in hohem Masse von der Antriebskraft abhängig. Die erreichte Ganggenauigkeit liegt wohl bei ca. 15 min/Tag

www.deutsches-museum.de /ausstellungen/naturwissenschaft/zeitmessung/uhrzeiten/

Mechanische Uhren mit Waag und Pendel

Die ältesten bekannten mechanischen Uhren aus dem 14. und 15. Jahrhundert erzeugen ihre Zeitschritte mit der Waag. Die periodische Drehbewegung dieser weit verbreiteten mechanischen Hemmung ist kein freies, sondern ein periodisch blockiertes und neu angestoßenes Schwingen. Der Gang der Waaguhren ist recht ungenau, und sie mußten täglich nach der Sonnenuhr nachgestellt werden.

1656 führte Christiaan Huygens das frei schwingende Pendel in die Uhrentechnik ein. Die damit erzielte Verbesserung der Genauigkeit des Gangs war so überzeugend, daß seither auch in vielen älteren Uhren die Waag durch ein langes Pendel ersetzt wurde.

Siehe auch

http://www.f-k-turmuhren.de/index.php/aus-der-praxis/hemmungen
http://www.uhrenhanse.de/sammlerecke/turmuhren/turmuhr.htm
http://www.uhrenlexikon.de/begriff.php?begr=Zeittafel%2004%20%28um%201300%20-%201404%29
http://www.frankfurtergalerie.de/web/raederuhren.php
http://www.yellys.ch/service/tech4.html

Ein Autor allerdings berichtet dass eine mit CNC-Maschinen gefertigten kleinen Waaguhr nach Feineinstellung eine Genauigkeit von 2 Minuten in 24 Stunden aufwies. Das beurteilt er als Grenze des mit dieser Waaguhr Möglichen
http://dg-chrono.info/dg-chrono.de/forum/viewtopic.php?f=135&t=2390

Die meisten Autoren sprechen der Waaghemmung die Eigenschaft eines Oszillators ab und vergleichen ihn eher mit dem Klappermechanismus eines Weckers.[4]

2.) Ist eine Ungenauigkeit von 15 Minuten am Tag glaubwürdig?

Beim Nachdenken gelangt man zu der Vermutung, dass die allgemeine heutige Meinung über die große Ungenauigkeit nicht zutreffen kann. In jener Zeit war die Waaguhr der einzige verfügbare, mechanische Zeitmesser einer Gemeinde. Ihre Kontrolle und Einstellung bei Fehlanzeige konnte nur mit der an den Kirchen dafür vorgesehenen Mittags- Sonnenuhr vorgenommen werden, die eine auf etwa 1 Minute genaue Ablesung gestattete.

Wenn die Sonne schien, konnte also für eine erratisch gehende Uhr täglich wieder ein „restart" auf die etwa 1 Minute richtig abgelesene Mittagszeit vorgenommen werden[5]. Was aber, wenn die Sonne nicht schien? Dann hätte sich innerhalb einer Woche eine Fehlzeit von Stunden aufsummieren können.

[4] Diese Falschbeurteilung wird im folgenden Link animiert demonstriert
https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Verge_Escapement?uselang=de
[5] Mit etwa der gleichen Genauigkeit kann man am Werk die Stellung des Bodenrads und damit die Zeitanzeige der Uhr ablesen.

Ein naturverbundener Mensch wacht ohne Wecker täglich innerhalb weniger Minuten zur üblichen Zeit auf. Den Handwerkern und Bauern wäre nach ganz kurzer Zeit aufgefallen, dass die Uhr „falsch ging“. Für die liturgischen Zwecke des religiösen Weckrufs wäre sie gänzlich unbrauchbar gewesen. Hätte man für ein mechanisches Wunderwerk so viel Geld ausgegeben, wenn es in der Praxis unbrauchbar war?

3.) Messung an einer rückgebauten Waaguhr

Nach Entdeckung der isochronen[6] Pendelschwingung wurde die bei alten Waaguhren vertikal angeordnete Spindel bald allgemein horizontal umgelagert und zunächst starr mit einem leichten Pendel fest verbunden („Spindeluhr“). Die Handwerker gingen dabei sehr geschickt vor, verwendeten die alten Teile in anderer Lage wieder. Sie führten nur ein zusätzliches Getrieberad ein, weil sonst zur Anpassung an die große Waagperiode von 6-8 Sekunden ein zu langes Pendel (> 10 m) notwendig gewesen wäre, was bei dem notwendig großen Ausschlagwinkel der Spindelhemmung ausgeschlossen war. Sie vermieden es weitgehend den Werkrahmen zu verändern und neue Lager zu bohren. So ist es heute technisch relativ einfach möglich unter Verwendung vorhandener Teile eine früher auf Spindeluhr umgerüstete Waaguhr ohne drastische Eingriffe wieder in dem alten Zustand zurückzubauen[7].
Messungen an meinem Rückbau einer mit 1478 datierten „gotischen“ Uhr (nebenstehendes Bild 1) ergaben bei mehreren jeweils 8 Stunden dauernden Messungen eine statistische Schwankung pro Stunde von +-6 Sekunden. Dabei wurde mit einer Stoppuhr der Zeitabstand zwischen dem Fallen des Hebers für den Stundenschlag bestimmt. Danach war eine tägliche Schwankung weit unter 15 Minuten zu erwarten.

Bild 1: Turmuhr, datiert 1478
Überliefert als Spindeluhr (Pendel verloren).
Rückgebaut vom Autor mit neuer Waag

[6] Isochron: konstanter Zeitabstand eines periodischen Signals. Ein frei aufgehängtes Pendel ohne Reibung schwingt isochron (Galilei Galileo 1583); 1657 bekam Christiaan Huygens ein Patent auf die Anwendung des Pendels in Uhren.
[7] Über das Identifizieren von umgebauten Waaguhren und ihren zweckmäßigen Rückbau wird auf meiner homepage getrennt berichtet werden.

Bei diesem Werk, das gut 200 Jahre als Waag- und dann noch einmal 200 Jahre als Spindeluhr mit Pendel lief, waren die Getriebe ausgeleiert und die Lagerbuchsen hatten Spiel. Um Messwerte zu erzielen, wie sie einer Waaguhr im Zeitpunkt der Herstellung entsprachen, wurde in den gleichen Abmessungen ein Neubau konstruiert, der in Aufzug und Zeitabnahme automatisiert war. Außerdem wurde dafür eine Spindel[8] entwickelt, deren Lappenwinkel und Lappenlänge variabel waren, um verschiedene Dimensionierungen des Lappeneingriffs erproben zu können.

4.) Neubau einer Waaguhr.

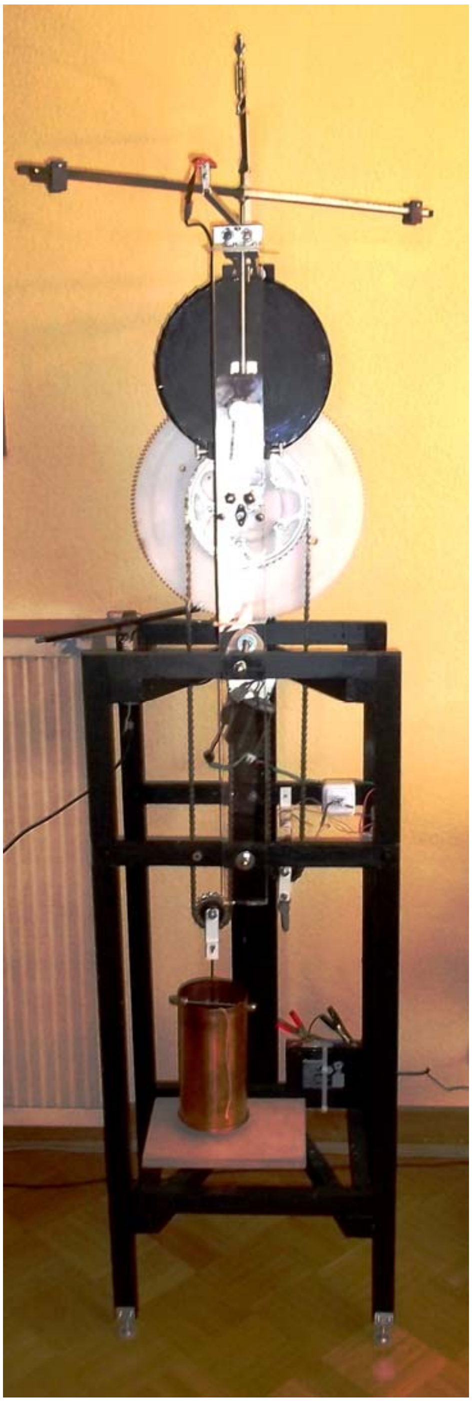


Bild 2 zeigt das neue Uhrwerk. Es hat 2 vertikale Bänder zum Aufbau, die durch Schraubenstangen miteinander und mit dem Uhrenstuhl aus Holz verbunden sind. Alle Achsen laufen in Gleitlagern aus Kunststoff. Die Kronradachse wird durch Stellschrauben an den Gestellfüßen horizontal justiert, das vordere Kronradlager mit 2 Stellschrauben auf die Spindelachse zentriert. Das rückseitige Ende der Kronradachse wird durch den horizontalen Impuls der Spindellappen gegen eine verstellbare Schraube mit 0,75 mm Ganghöhe gedrückt, mit welcher der Eingriff der Spindellappen fein reguliert werden kann.

Oberes und unteres Spindellager sind horizontal verschiebbar, so dass die Spindelachse senkrecht zur Kronradachse justiert, und die Tiefe des Kronradeingriffs in weiten Grenzen grob eingestellt werden kann. Die Spindel hängt an einem Faden, dessen obere Aufhängung horizontal in 2 Achsen verstellbar ist, so dass die Spindel ohne Antrieb frei in ihren Lagern spielt. Der Spindelfaden ist an einem auskragenden, horizontalen Balken befestigt, so dass die Waag auch bei sehr großen Ausschlägen (>= ±180 Grad) nirgends anschlägt.

Bild 2: Frontalansicht des Neubaus
Gesamthöhe 210 cm; Bodenrad Durchmesser 40 cm; Kronrad Durchmesser 27,5 cm,

[8] Anfertigung durch *Rücker Maschinenbau GmbH* Hösbach

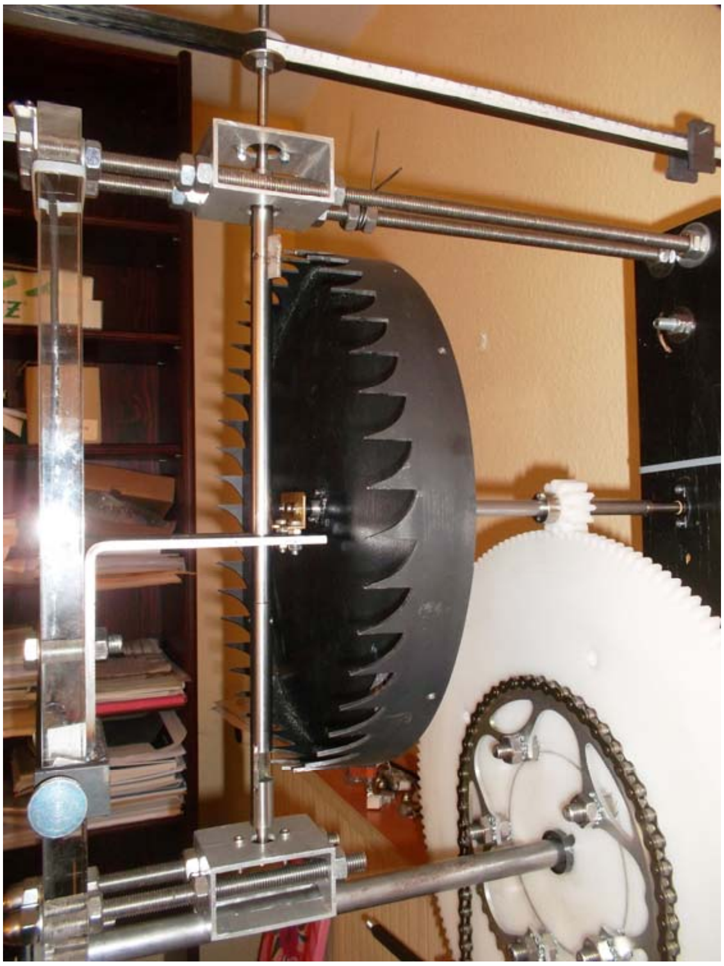


Bild 3: Kronrad und Spindel mit Waag, und ihre Justiereinrichtungen. Die Kronradzähne sind so geformt, dass auch sehr tiefe Eingriffe erprobt werden können.

Die Spindel besteht aus 2 durch einen Stift verbundenen Teilen. Durch Verdrehen und Fixieren mit einer Madenschraube kann ein beliebiger Lappenwinkel eingestellt werden. Die Lappen aus Silberstahl sind auswechselbar, so dass verschiedene Lappenlängen erprobt werden können. Mit Madenschrauben wird ihre wirksame Länge fixiert.

Das Bodenrad hat einen *Huygenschen* Antrieb mit Fahrradkette und Kettenrädern. Das Gewicht wird mit einem Getriebemotor mit Freilauf angehoben, dessen Ein- und Abschaltung über ein Reedrelais mit Schaltmagnet gesteuert wird. Stromquelle ist ein kontinuierlich nachgeladener 6V- Akku[9], dessen Stromkreis zum Motor mit einem vom Reedkontakt gesteuerten Relais geschaltet wird. Das Aufziehintervall beträgt ca. 5 mm.

Am einen Ende des aus Kohlefaser- Rechteckrohr bestehenden Waagbalkens ist ein Schaltmagnet befestigt, der einen feststehenden Reedkontakt ansteuert. Dessen Schaltsignal wird über eine serielle Schnittstelle und ein USB Kabel einem PC zugeführt, auf dem das Programm *Xnote-Stopwatch* die Zeitsignale mit einer Auflösung von 1/100 Sekunde aufzeichnet. Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Schaltereignissen ergibt eine Vollperiode der Waagschwingung. Die gespeicherten Zeitsignale werden mit Excel ausgewertet.

Am Rande des Bodenrads befindet sich ein Stift, der einmal pro Umlauf, also einmal pro Soll-Stunde, einen leichten Heber abfallen lässt. Er prallt auf einen Miniaturschalter und löst damit das Stundensignal aus. Bei längeren Messperioden wird das Stundensignal mit einer Genauigkeit von 0,1 Sekunde als Uhrzeit mit Datum aufgezeichnet.

Auf dem Waagbalken befindet sich ein Maßband und ein Noppenband mit 3 mm Rastung. In ihr hängen die einer groben Einstellung der Waagperiode dienenden beiden Waaggewichte von je 100 g. Zur Feinjustierung der Schwingungsperiode dienen zwei Hilfsgewichte von je 10 g.

Weitere Detailaufnahmen sind am Ende des Artikels zusammengestellt.

[9] Mit dieser Schaltung wurden vom Spannungswandler ausgelöste Fehlimpulse im Zählkreis eliminiert.

Die Getriebe sind wie folgt bemessen:

	Zähnezahl	Durchmesser (cm)	Umlaufzeit (Sekunden)
Bodenrad	160	40	3600
Trieb	12	3,5	270
Kronrad	43	27	270
Spindel		Waag- Periode	**6,27907..**

Die Wahl der Übersetzungsverhältnisse war nicht sehr geschickt: sie führte dazu, dass die Umdrehungszeiten von Kronrad und Bodenrad nicht in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander standen (160/12 =13,3333..), so dass Restperiodizitäten sich nicht innerhalb einer Stunde ausgleichen konnten. Nach Ende der zunächst beschriebenen Messungen wurde deshalb der Trieb gegen einen mit 16 Zähnen ausgewechselt (Waagperiode dann 8,37… Sekunden)

5.) Reproduzierbarkeit und Genauigkeit.

Die Uhr erwies sich in ihrer Reproduzierbarkeit als überraschend robust. Mehrfaches Zerlegen und Neuaufbau mit verbessertem Antrieb und anderen Lagern, oder auch mäßige Veränderung des Lappenwinkels und der Eingriffstiefe führten zu jeweils vergleichbaren Ergebnissen. Deshalb werden hier nur Daten für einen Lappenwinkel von 100 Grad beschrieben, wofür die längsten Messreihen vorliegen. Die Lappenlänge betrug jeweils 15 mm.

Bei der Justierung wurde darauf geachtet, dass die Kronradachse die Spindelachse genau schneidet und senkrecht auf ihr steht. Die Zähne des Kronrads wurden senkrecht zur Kronradachse abgedreht und auf der senkrechten Flanke poliert. Der „Fall“ der Lappen auf die Kronradzähne wurde durch Einstellen des Eingriffs für die ersten Messungen minimiert, jedoch so, dass ein freier Durchgang der Zähne gesichert war.

Bodenrad und Kronrad wurden nach Möglichkeit ausgewuchtet. Eine geringe doppelte Periodizität des Antriebs durch deren Restunwucht und durch kleine Unregelmäßigkeiten der Kronradzähne konnte nicht ganz vermieden werden; sie lag bei einer Standardabweichung von 0,02 Sekunden pro Waagperiode von 6,3 Sekunden.

- Für die intrinsische[10] Qualität eines Zeitmessers sind zwei Eigenschaften wichtig
- Die **Reproduzierbarkeit** einer von ihm durch Zählung bestimmten werkcharakteristischen Einheit (Waagperiode, Kronradumlaufszeit, Bodenradumlaufszeit)
- Die **Genauigkeit der Zeitanzeige** als Übereinstimmung dieser Einheiten mit standardisierten Zeiteinheiten.

Für die praktische Brauchbarkeit des Zeitmessers als Uhr kommt als extrinsische Charakteristika dazu

- Der **Einfluss von Umgebungsbedingungen** wie Temperatur, Erschütterung, Luftdruck, etc.

Bei der Waaguhr ist zu berücksichtigen, dass in ihrer Einsatzzeit eine Überwachung durch eine Mittagssonnenuhr nur im Tagesrhythmus möglich war. Es gab also keine Messmethode um die

[10] Intrinsisch: nur durch den betrachteten Gegenstand selbst bedingt; Gegenteil extrinsisch

Reproduzierbarkeit von Stunden oder gar von Waagperioden mit vergleichbarer relativer Genauigkeit zu messen; Schwankungen in diesem Bereich waren mithin irrelevant.

Wenn also zum Beispiel durch Unregelmäßigkeiten des Getriebes im Verlauf einer Stunde oder eines Tages die Uhr einmal schneller, einmal langsamer ging, so hatte dies keinen Einfluss auf die messbare Reproduzierbarkeit wenn diese Unregelmäßigkeiten periodisch auftraten und sich innerhalb von 24 Stunden ausglichen.

Bei den hier vorliegenden Messungen mit hochgenauen Zeitstandards werden also Unregelmäßigkeiten registriert, die damals unbeobachtbar und bedeutungslos waren.

6.) Einstellbarkeit und Reproduzierbarkeit – Messprotokoll 3.-10.3.2016

Das vierte Bild zeigt Ergebnisse einer mehrtägigen Messung der Abweichung der Waagstunde von der Normstunde in Sekunden. Es sei betont, dass der Eingriff auf maximale Tiefe (kaum erkennbarer *Fall*) eingestellt war.

Der Wechsel von Tag und Nacht wird durch die magentafarbene Kurve gekennzeichnet. Der Sollwert ist als dicke rote Null-Linie eingezeichnet.

In den ersten beiden Tagen wurde die Uhr nach einem Umbau durch Verschieben der Waaggewichte auf Normzeit eingestellt. Dabei traten zunächst Abweichungen von - 20 bis +53 Sekunden pro Stunde auf. Nach 48 Stunden war der Sollwert bis auf wenige Sekunden eingekreist. Die beiden Ausreißer mit +10 Sekunden zeigen Zeitpunkte einer weiteren Feineinstellung an, bei dem der Waagbalken für einige Sekunden angehalten wurde. Danach läuft das Werk ohne weiteren Eingriff weiter.

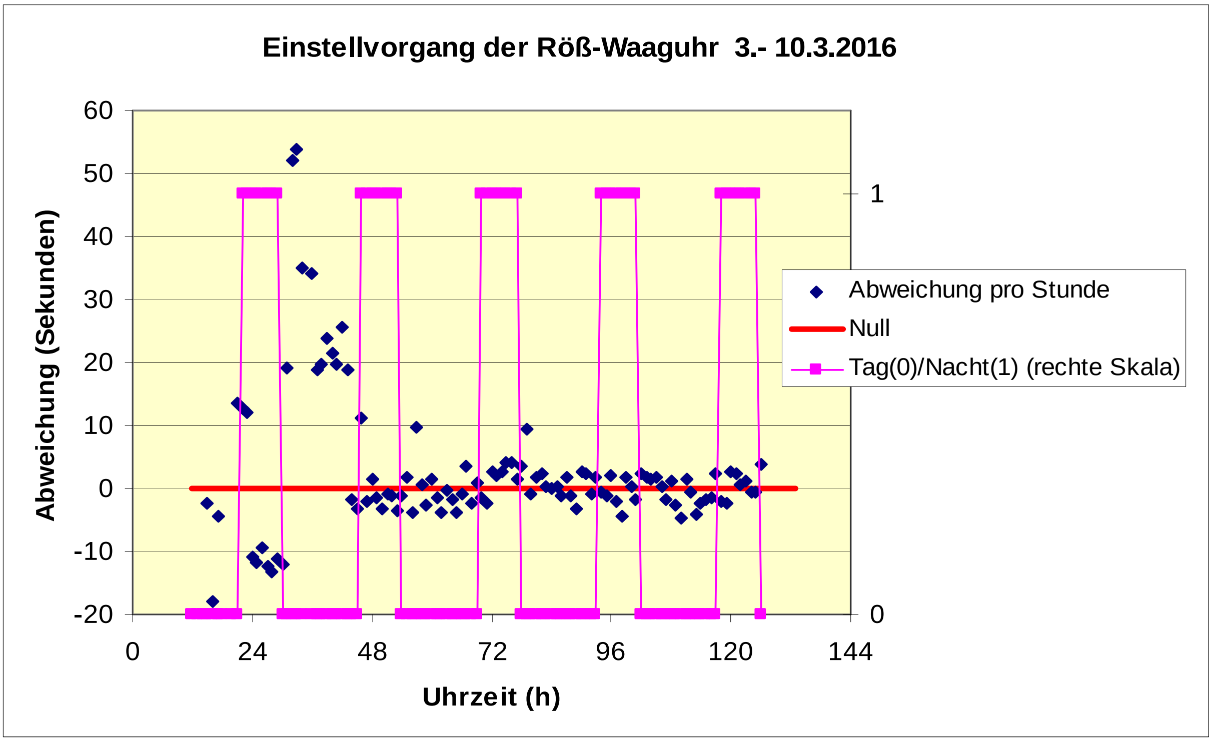


Bild 4: Messreihe bei Neueinstellung der Waagperiode.

Ab Stunde 78 beträgt die Standardabweichung vom Mittelwert, also die Reproduzierbarkeit, 2,45 Sekunden pro Stunde. Eine systematische Differenz zwischen Mittelwert und Sollwert (Genauigkeit) und auch eine nichtstatistische Wanderung ist visuell in diesem Maßstab nicht erkennbar.

Das nächste Bild 5 zeigt nach der obigen Einstellung die Waaguhrzeit als Funktion der Normuhrzeit und den Unterschied zwischen beiden (magentafarben). Er beträgt am Ende der ersten 24 Stunden 0,17 Minuten, nach 2 Tagen 0,4 Minuten.

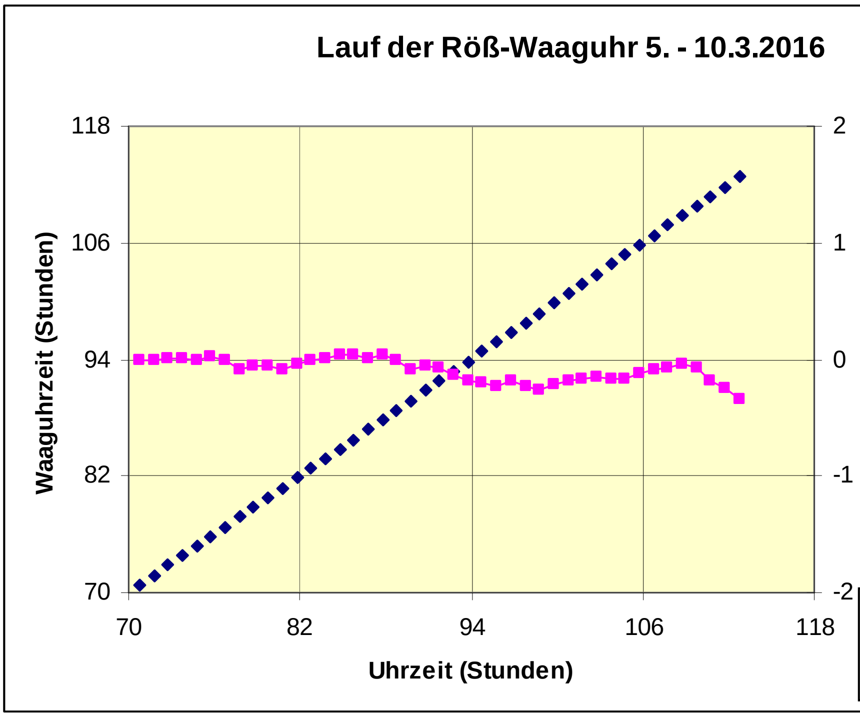


Bild 5: eingelaufener Zustand

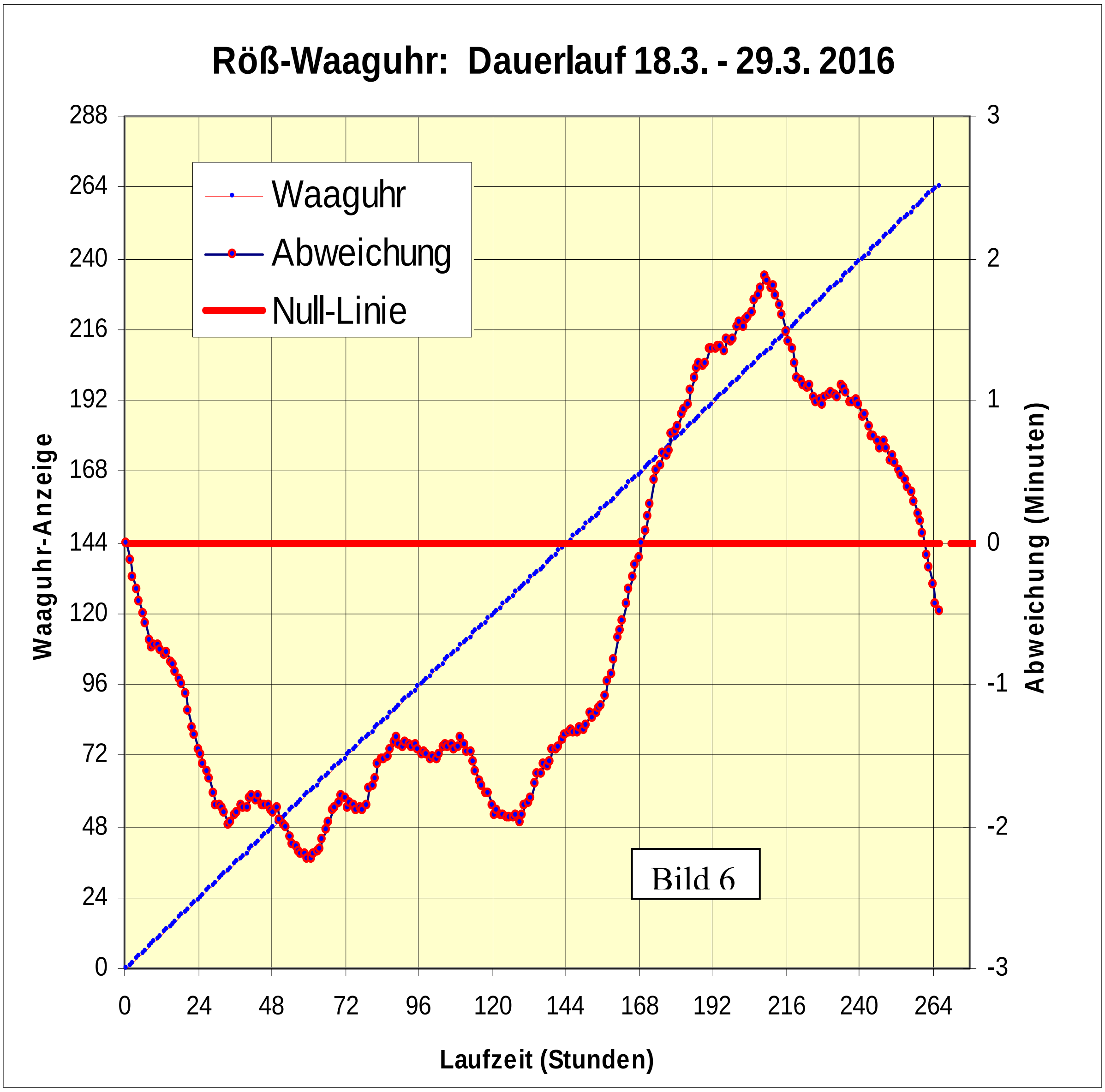
Neben kleinen statistischen und periodischen Schwankungen erkennt man eine geringe, systematische Drift zu schnellerem Gang.

7.) Messreihe über 11 Tage und Nächte

Das nächste Diagramm (Bild 6) veranschaulicht bei gleicher Einstellung die Messdaten eines Dauerlaufs über gut 11 Tage und Nächte (266 Stunden), in dem nach der Ersteinstellung nichts mehr verändert wurde. Die Gitterlinien zeigen mit einer Teilung von 24 Stunden die abgelaufenen Tage an.

Die Abweichung der Waaguhr von der Normalzeit bleibt im ganzen Bereich unter + - 2 Minuten, was einer mittleren Abweichung von + - 12 Sekunden pro Tag entspricht. Die stark schwankende tägliche Abweichung bleibt im Bereich von 1 Minute. Die Uhr läuft zunächst etwas zu langsam, dann etwas zu schnell und kreuzt dabei zweimal die genaue Uhrzeit.

Die längerfristigen Schwankungen sind im Wesentlichen temperaturbedingt. Nach der Einstellung auf die Sollzeit folgten zwei kalte Tage, bei 130 Stunden der erste warme Frühlingstag; bei 210 Stunden wurde der Heizkörper neben der Uhr heruntergeregelt. Auch die kurzfristigen Schwankungen dürften im Wesentlichen durch Temperaturänderungen beeinflusst sein: die Uhr steht im Arbeitszimmer in dem sich der Autor am Tag jeweils zwischen 4 und 6 Stunden aufhielt. Mit steigender Temperatur läuft die Waaguhr schneller.



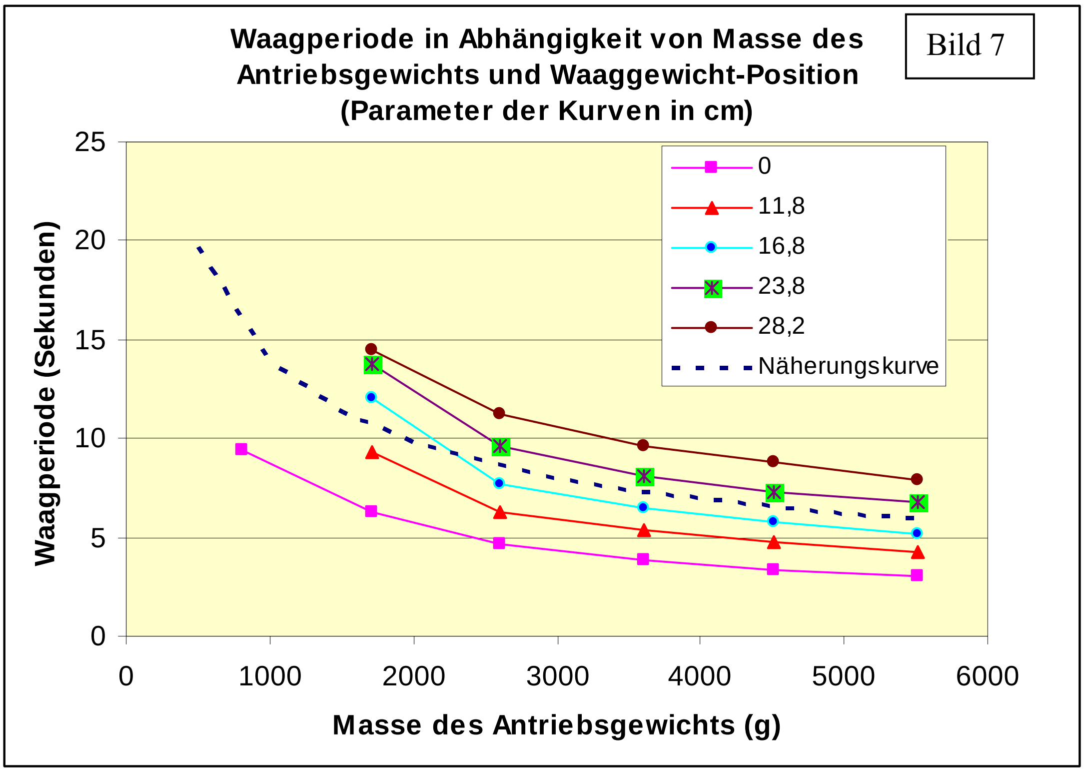
Aus der Schwankung kann man bei einem grob gemessenen Unterschied der Zimmertemperaturen von 3 Grad abschätzen, dass die Temperaturabhängigkeit bei etwa 1 Minute pro Grad und Tag liegt. Eine genaue Messung und Diskussion der Temperaturabhängigkeit folgt weiter unten

8.) Bestimmung einer Formel für die Waagperiode

Zur näherungsweisen Bestimmung der Formel für die Schwingungsdauer wurde ihr Wert in Abgängigkeit vom Antriebsgewicht und von der Position der Waaggewichte (Abstand von der Spindelachse) bestimmt. Jede Einzelmessung ist der Mittelwert über 100 Perioden. Sie zeigen etwas größere Schwankungen als die Tagesmessungen, da sich innerhalb der kurzen Messzeit die verbleibenden Unregelmäßigkeiten des Getriebes noch nicht ganz ausmitteln.

Das kleinste Masse des Antriebsgewichts, mit dem die Waag ohne Waaggewichte (Position 0) von allein anschwang, war 800g[11]. Darunter behinderte die ruhende Reibung in Getriebe und Spindellappen ihre Bewegung. Mit Waaggewichten war ein Antrieb mit 800 g für eine sichere Messung zu gering. Wie die folgende Diskussion zeigen wird, war auch bei 1700 g noch deutlich ein Einfluss der Reibung erkennbar; oberhalb von 2500g wurde er praktisch unbeobachtbar.

Im nächsten Diagramm (Bild 7) ist als Abszisse die Masse *G* des Antriebsgewichts aufgetragen. Die durch gerade Striche verbundenen Punkte stellen jeweils eine Messreihe mit konstanter, symmetrischer Position der beiden Waaggewichte auf den Waagarmen dar.

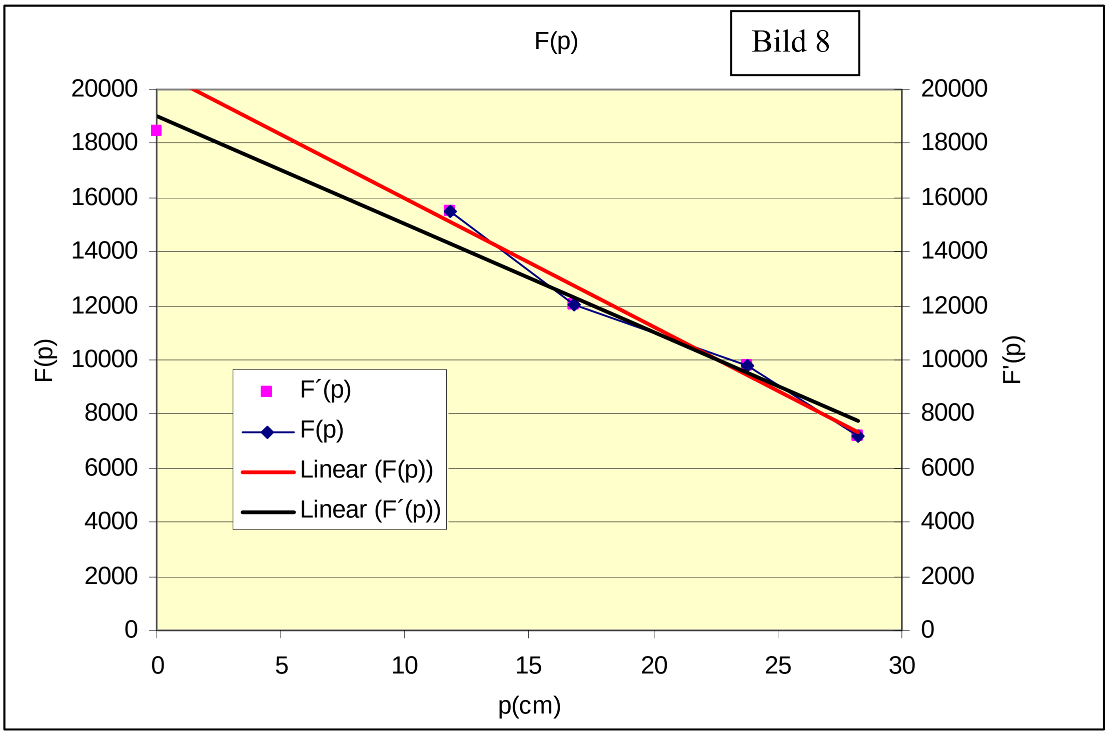


Gestrichelt ist den Messpunkten eine Näherungs- Kurve überlagert, welche bis auf eine nur von der Position *p* abhängigem Faktor *F(p)* die reziproke Wurzel aus der Masse *G* des Antriebsgewicht ist. Sie ist eine gute Näherung für Antriebsmassen größer 2500 g, und zwar bei geeigneter Wahl des Faktors *F* für alle 5 Messkurven

$$T = \frac{F(p)}{\sqrt{G}}$$

Im nächsten Diagramm (Bild 8) ist der Faktor *F* in Abhängigkeit von der Waggewicht-Position aufgetragen. Die schwarze lineare Trendlinie verbindet alle Messwerte, die rote lässt den Messwert ohne Waaggewicht (Position 0) aus.

[11] Die angegebenen Werte sind Nettowerte nach Abzug des kleinen Gegengewichts und der Unterschiede im Kettengewicht. Ein freihängendes Gewicht hätte im Vergleich zum Huyghenschen Aufzug den halben Wert.



Man liest zunächst grob eine lineare Abhängigkeit der Waagperiode von der Position p ab. Das bedeutet, dass sie annähernd proportional der Wurzel aus dem Trägheitsmoment[12] des Waaggewichts wäre (bei punktförmig gedachtem Waaggewicht W ist sein Trägheitsmoment $J = p^2W$).

Die Abweichung bei der Position Null ist einfach zu verstehen: In dieser Position sind im Experiment die Waaggewichte entfernt (was rechnerisch identisch mit der Position Null von punktförmigen Gewichten wäre). Dabei hat die Waag aber nicht das Trägheitsmoment Null, sondern ein aus Gewicht und Ausdehnung von Spindel und nacktem Waagarm resultierendes Restträgheitsmoment J_0[13]. Man kann also mit recht hoher Genauigkeit die folgende Abhängigkeit für die Schwingungsperiode ansetzen (sobald das Antriebgewicht genügend hoch ist um den Einfluss der Reibung vernachlässigen zu können).

$$T = A\sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment der Waag}}{\text{Gewicht des Antriebs}}} = A\sqrt{\frac{J[cm^2 g]}{g[cm\sec^{-2}]G[g]}} = A[\sqrt{cm}]\sqrt{\frac{J}{gG}}[\sec]$$

$$g = 981[cm\sec^{-2}]; A = const[\sqrt{cm}]$$

Im Nenner geht das Gewicht des Antriebs ein, also das Produkt aus seiner Masse G und der Erdbeschleunigung g. In das Trägheitsmoment des Zählers geht die Masse der Waag direkt ein.

[12] Das Trägheitsmoment J ist das Maß für den massenabhängigen Widerstand gegen Drehgeschwindigkeitsveränderung, analog zur trägen Masse bei linearer Geschwindigkeitsänderung. Bei einer Massenverteilung $m(r)$ senkrecht zur Rotationsachse, mit r als Abstand zur Rotationsachse, ist $J = \int_0^\infty m(r) r^2 dr$

Das Trägheitsmoment eines schmalen Waaggewichts W im Achsenabstand p folgt näherungsweise zu Wp^2

[13] Zu J_0 trägt in geringem Umfang auch das Trägheitsmoment von Kronrad und Bodenrad bei, im Verhältnis der jeweils um das Übersetzungsverhältnis verminderten Winkelgeschwindigkeiten.

Damit folgt für die Periodendauer die richtige Dimension [sec], wenn man A die Dimension [$cm^{1/2}$] gibt (siehe weiter unten).

Wir zerlegen das Trägheitsmoment der Waag in das des in seiner Position nahezu punktförmigen Waaggewichts und das von Spindel und Waagarm J_0. Ihm können wir rechnerisch eine Position p_0 des Waaggewichts W zuordnen

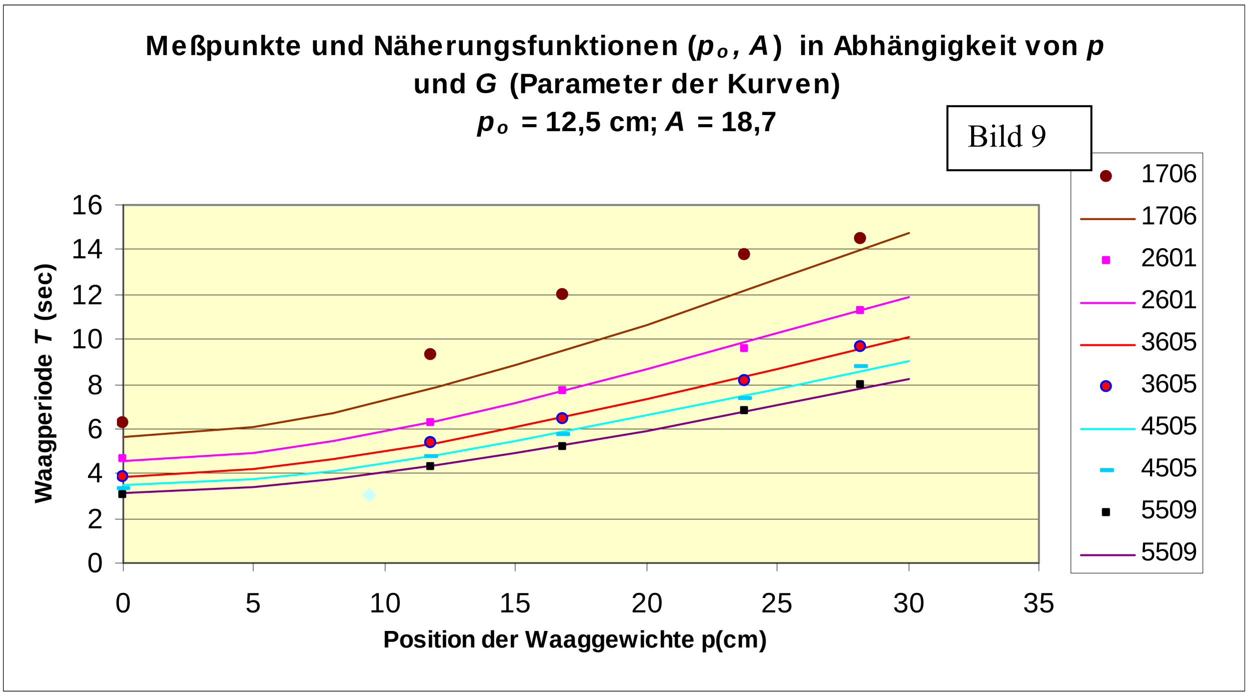
$$J = J_0 + p^2 W$$

$$J_0 \equiv p_0{}^2 W$$

$$T = A\sqrt{\frac{W}{gG}}\sqrt{p_o{}^2 + p^2}$$

Die für das Gerät spezifischen Konstanten p_0 und A legen wir unter Variation von Position und Gewicht so fest, dass die Näherungskurven die Messwerte möglichst gut darstellen.

Die nächste Graphik (Bild 9) zeigt das Ergebnis. Die Näherungskurven sind farbige, ausgezogene Linien, die Messpunkte einzelne, gleichfarbige Punkte. Auf der Abszisse ist die Position der Waaggewichte aufgetragen. Die Masse des Antriebsgewichts ist Parameter der verschiedenfarbigen Daten.



Die Messpunkte aller Messreihen G ≥ 2601 g werden recht genau durch Näherungskurven dargestellt, mit den einheitlichen Konstanten

$$p_0 = 12{,}5 \text{ cm}; \quad A = 18{,}7$$

Die Messreihe mit dem geringsten Antriebsgewicht weicht deutlich von der Näherungsformel ab; hier spielt die Reibung eine nicht zu vernachlässigende Rolle.

Die gerätespezifische Konstante A lässt sich noch näher aufschlüsseln.

Durch das Getriebe von Bodenrad zu Kronradachse und Kronradzahn wird die auf den Spindellappen wirksame Kraft des Antriebsgewichts um die Übersetzung des Getriebes vermindert. Außerdem ist das Antriebsgewicht nur mit seinem halben Wert wirksam, weil es in dem Huygenschen Aufzug auf die Kettenrolle wirkt, deren eines Ende die ganz überwiegende Zeit am Motor fixiert ist

$D = 20{,}5\ cm$ Durchmesser des Kettenrads auf dem Bodenrad

$d = 2{,}5 cm$ Durchmesser des Ritzels auf der Kronradachse

$r = 13{,}8 cm$ Radius des Kronrads

$R = \frac{20{,}5}{2{,}5} 13{,}8 = 113$ Übersetzung

$A[\sqrt{cm}] \approx \sqrt{2R} = \sqrt{226} = 15$

Dies stimmt recht gut mit dem aus den Messreihen ermittelten Wert von 18,7 überein.

Damit kann man die Formel für die Schwingungsperiode einer Waaguhr ganz allgemein formulieren

$$T = B\sqrt{\frac{RJ}{gG}} = B\sqrt{\frac{R(J_0 + p^2 W)}{gG}} = B\sqrt{\frac{RW}{gG}}\sqrt{p_o{}^2 + p^2}\,[\mathrm{sec}]$$
$$B \sim 1$$

Dabei ist *gG* das auf das Bodenrad wirkende Antriebsgewicht, *R* die Übersetzung der Antriebskraft auf den Spindellappen, *W* die zusammengenommene Masse der beiden Waagewichte und *p* deren Position. Die dimensionslose Konstante *B* ist von der Größenordnung 1. Einzige verbleibende Apparatekonstante ist das Trägheitsmoment von nackter Waag und Spindel, das man mit einer Messung der Waagperiode ohne Waaggewicht ($p = 0$) bestimmt.

9.) Feinabstimmung

Aus der Gleichung kann man die Beziehung für die Abstimmung auf eine Sollperiode ableiten. Es wird als Erstes angenommen, dass dies bei konstantem Antriebsgewicht durch Verschieben der Waaggewichte erreicht werden soll. Es sei *dT* die notwendige Korrektur der momentanen Periode *T*.

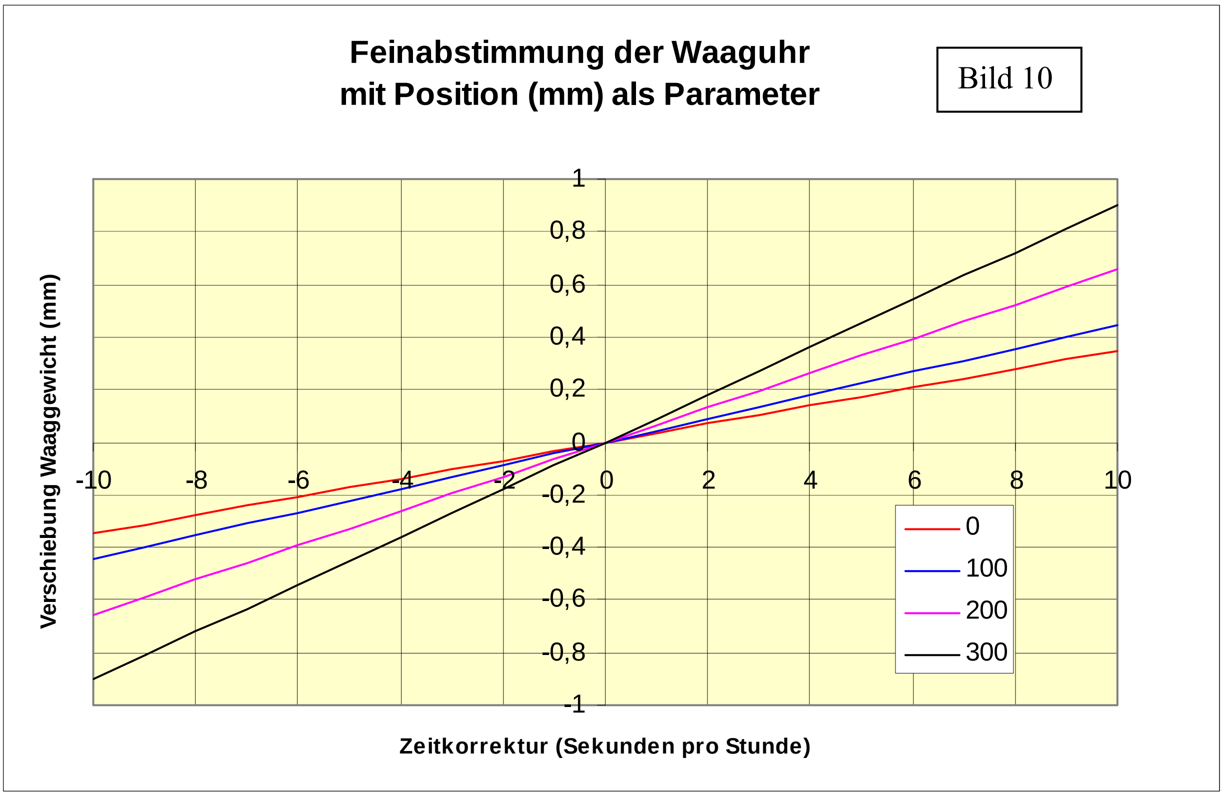
Dann ist

$$T = B\sqrt{\frac{RW}{gG}}\sqrt{p_o{}^2 + p^2}$$

$$\frac{dT}{dp} = T\frac{p}{(p_o{}^2 + p^2)}$$

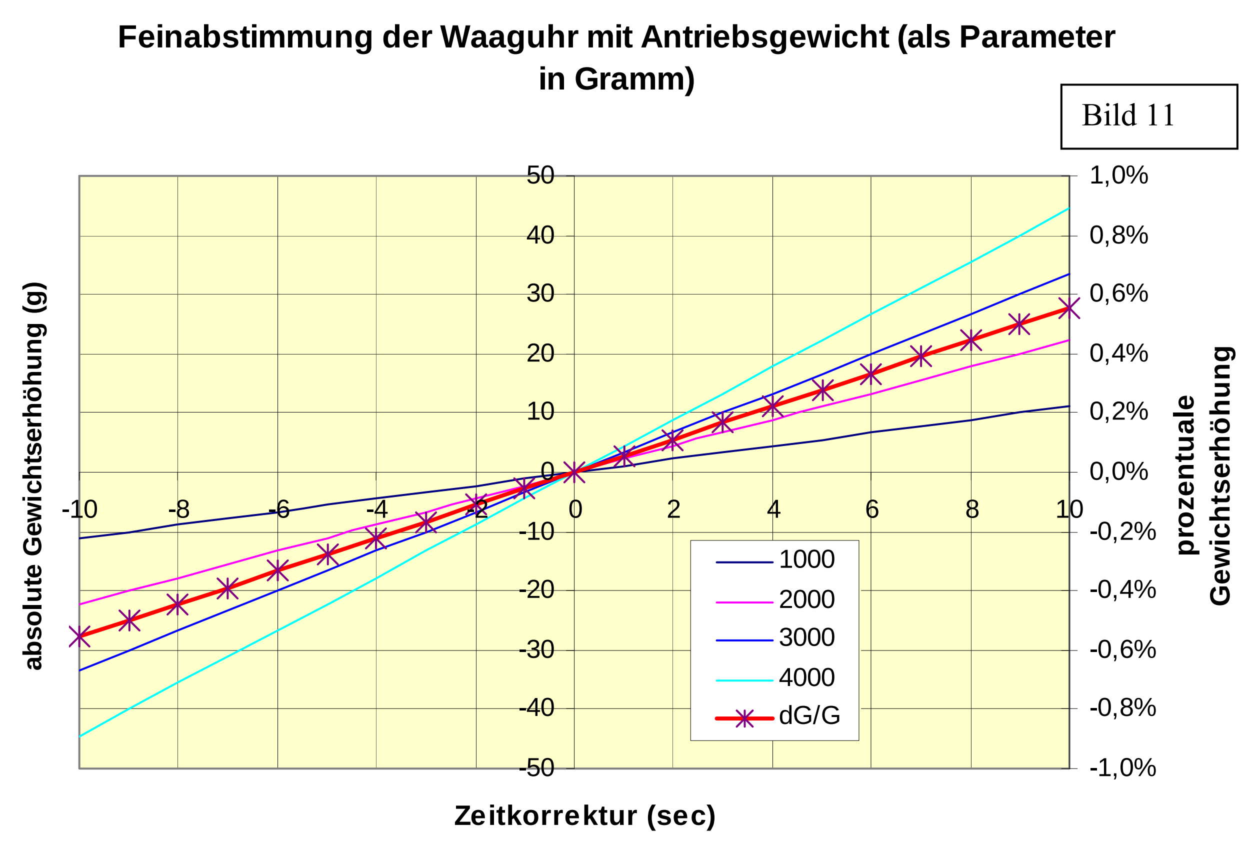
$$dp = \frac{dT}{T}\frac{(p_o{}^2 + p^2)}{p} \approx \frac{dT}{T}p \quad \text{für} \quad p \gg p_o$$

Damit hat man die für die Erzielung einer Zeitkorrektur *dT* notwendige Verschiebung *dp* des Waaggewichts. Im folgenden Diagramm (Bild 10) ist die Verschiebung in mm in Abhängigkeit von der gewünschten Zeitkorrektur pro Stunde aufgetragen. Parameter der Kurven ist die Ausgangsposition in mm. Wie die Kurven zeigen, entspricht die Abhängigkeit für kleine Korrekturen sehr gut der linearen Näherung.



In diesem Feinbereich der Abstimmung von maximal 10 Sekunden pro Stunde läge die notwendige Verschiebung der Waaggewichte unter 1mm, was technisch nicht sauber durchführbar ist. Mit den zehnfach leichteren Hilfsgewichten ist die Verschiebung zehnmal so hoch und mit der Größenordnung 1 mm pro Sekunde exakt einstellbar.

Ohne Verschiebung der Waaggewichte ist eine genaue Feinabstimmung durch eine geringe Erhöhung des ja in der Masse viel größeren Antriebsgewichtes möglich. Dies wird im nächsten Diagramm (Bild 11) gezeigt. Die auf die rechte Skala bezogene rote Linie mit Kreuzen zeigt die notwendige relative Änderung des Antriebsgewichts. Die ausgezogenen Linien zeigen auf der linken Skala die absoluten Gewichtsänderungen für verschiedene Werte des Gewichts in Gramm.



Sobald man diese Eichkurven hat ist eine Einstellung schnell möglich. Da sie für Geräte mit gleichem Aufbau identisch sind, war die richtige Einstellung für die alten Handwerker ganz einfach und bedurfte keines langen Probierens.

10.) Schwingungsamplitude und Standardabweichung der Waagperiode

Der einseitig maximale Ausschlagswinkel der Waag ist im nächsten Diagramm (Bild 12) als Funktion des Antriebsgewichts aufgezeichnet. Parameter der Kurvenschar ist die Position des Waaggewichts.

Wie die eingezeichneten Trendlinien zeigen, steigt der Winkel im verwendeten Antriebsbereich etwa logarithmisch mit dem Antriebsgewicht an. Er erreicht bereits für kleinen Antrieb einen Winkel von ± 90 Grad und reicht bei hohem Antrieb und großer Waaggewicht-Position bis ± 180 Grad.

Der Winkelausschlag nimmt mit der Position des Waaggewichts, also mit dem Trägheitsmoment der Waag, systematisch zu.

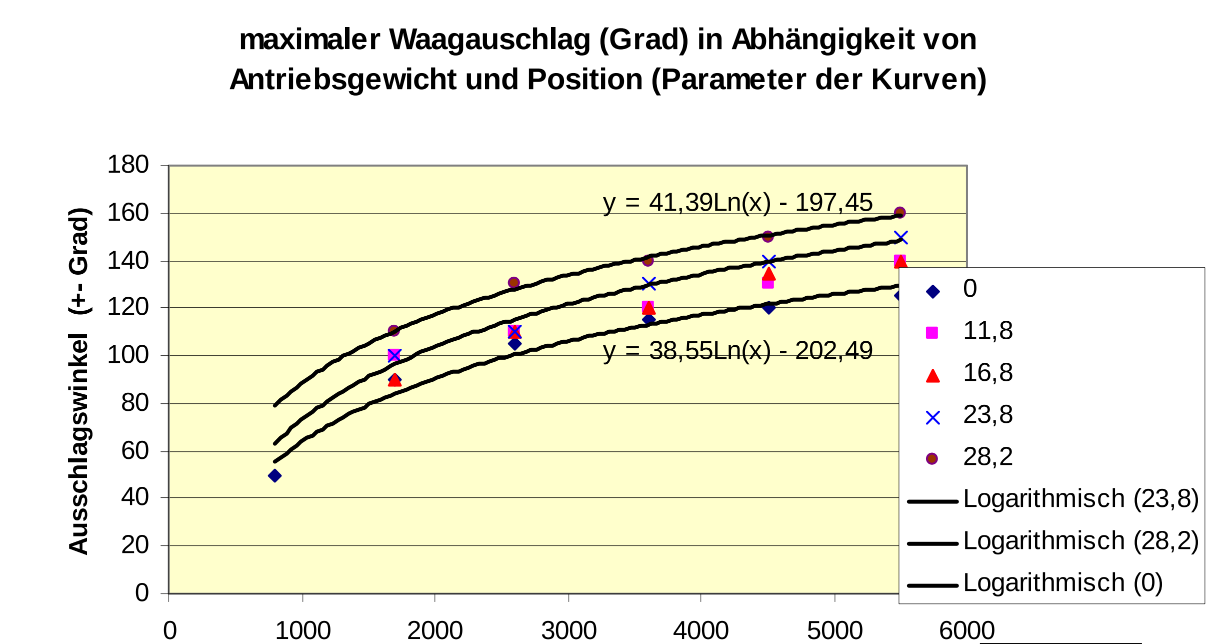


Bild 12

Das nächste Diagramm (Bild 13) zeigt die Standardabweichung der Waagperiode in Abhängigkeit vom Antriebsgewicht und der Waaggewichts-Position. Sie nimmt für mittlere Waaggewichtpositionen etwa mit $G^{-3/2}$ (Trendkurve) ab und erreicht die kleinsten Werte für mittlere Positionen der Waaggewichte (Trägheit der Waag). Die kurze Messdauer für diese Daten gibt diesem Zusammenhang nur einen qualitativen Charakter.

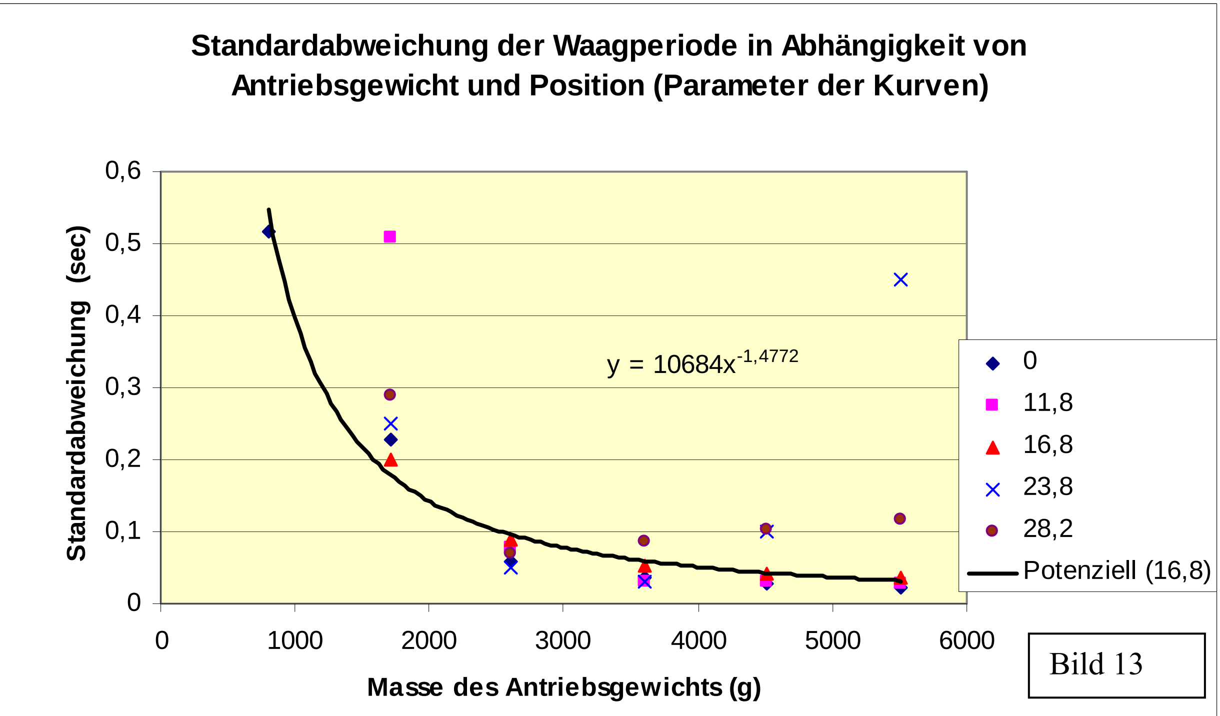


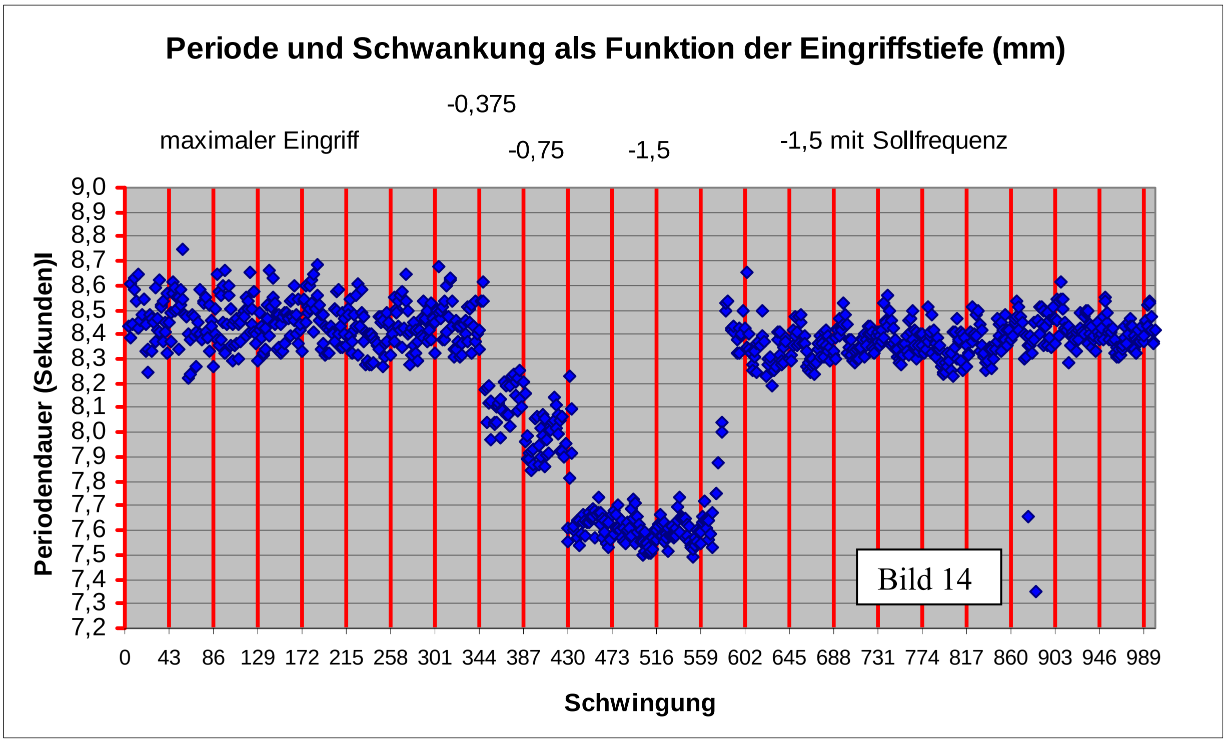
Bild 13

11.) Schwingung bei unterschiedlicher Eingriffstiefe

Die folgenden Messungen wurden mit einem Kronradtriebs von 16 Zähnen durchgeführt, was zu einer Sollperiode von 8,37 Sekunden führte. Ihr Ziel war die Ursache der Temperaturabhängigkeit weiter einzukreisen.

Bild 14 zeigt für die ersten 344 Schwingungen die jeweilige Periodendauer bei einem Mittelwert von 8,4 Sekunden. Die vertikalen roten Linien kennzeichnen einen vollen Kronradumlauf. Die Hemmung lief hier mit maximalem Eingriff, so dass die Zähne die beiden Spindellappen gerade noch ohne Berührung passierten. Die volle Schwankungsbreite betrug rund 0,4 Sekunden. Der Waagausschlag betrug etwas mehr als ± 180 Grad.

Nach 344 Schwingungen wurde der Eingriff um 0,375 mm, nach 378 Schwingungen um 0,75 mm und nach 430 Schwingungen um 1,5 mm verringert.



Die Tiefe des Eingriffs hat direkten Einfluss auf die Schwingungsperiode, auf den Waagausschlag und auch auf die Schwankungsbreite.

Eingriff	Periode (s)	Waagausschlag (Winkelgrad)	volle Schwankungsbreite (s)
maximal	8,4	±180-190	0,4
-0,375	8,1	±175	0,25
-0,75	7,95	±170	0,3
-1,5	7,6	±165	0,2

Danach wurde das Waaggewicht so weit verschoben dass die Schwingungsperiode wieder 8,4 Sekunden betrug. Die geringe Schwankung blieb dabei erhalten, ebenso der Winkelausschlag von ±165 Grad. In der Schwankungsbreite erkennt man jetzt deutlich eine Periodizität mit dem Kronradumlauf. Sie ist auf eine verbleibende Unwucht und auf Unregelmäßigkeit der Zähne zurückzuführen. Je tiefer der Eingriff ist umso stärker beeinflussen letztere Ausschlag und Periode, was zu abnehmenden Schwankung bei weniger tiefem Eingriff führt.

12. Die Waaghemmung als Oszillator

Ist die Waaghemmung nun intrinsisch ein echter Oszillator oder nicht?

Natürlich ist sie das!

Der eingangs zitierte Wikipedia- Artikel spricht der Waaghemmung die *Eigenschwingungsfähigkeit* ab. Der nächste Beitrag begründet dies damit, dass *keine Umwandlung zweier Energieformen stattfindet.*

Die zweite Aussage ist leicht zu widerlegen. Offensichtlich wird in der **Waaguhr** die potentielle Energie des Antriebsgewichts periodisch in die horizontale Rotationsenergie der Waag umgewandelt und umgekehrt.

Das ist bei der **Spindeluhr mit festem Pendel** im Prinzip nicht anders; dort wird potentielle Energie des Gewichts in nun vertikale Rotationsenergie des Pendels um die Kronradachse umgewandelt, und umgekehrt im Rückfall des Pendels.

Das freie Pendel ist nur bei sehr kleinem Ausschlag unter idealisierten Bedingungen (z.B. konstante Pendellänge, keine Reibung) ein isochroner, harmonischer Oszillator, mit sinusförmigem Zeitverlauf *t* des Ausschlagwinkels. Ansonsten ist es ein nichtlinearer Oszillator, bei dem die Winkelbeschleunigung vom Sinus des Winkels α abhängt.

Mathematisches Pendel

L: Pendellänge

g: Fallbeschleunigung

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\alpha$$

Wegen des Sinus ist der Zusammenhang zwischen Winkel α und Zeit *t* nichtlinear, die Schwingungsperiode hängt vom Ausschlag ab und wird umso länger, je größer dieser ist. Der Zweitverlauf der Schwingung weicht mit zunehmendem Ausschlag immer mehr von der Sinuskurve ab.

Daher mussten in den ersten Pendeluhren mit großem Ausschlagwinkel Maßnahmen, wie ein seitlicher Anschlag oder eine elastische Feder in der Aufhängung, ergriffen werden, um den Ausschlag möglichst konstant zu halten.

Bei sehr kleinen Winkelausschlägen α < 4 Grad kann man den Sinus gut durch den Winkel selbst annähern: $\sin\alpha \sim \alpha.$ Die Pendelgleichung vereinfacht sich in dieser Näherung zu der eines linearen Oszillators

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\alpha$$

Ihre Lösung ist eine Sinusschwingung mit vom (kleinen) Winkelausschlag unabhängiger Schwingungsperiode T:

$$\text{Lösungsansatz } \alpha = \sin\frac{2\pi}{T}t \rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Für eine Pendellänge von 100 cm wird die volle Schwingungsperiode T ziemlich genau 2 Sekunde (2,01…sec). Wegen des zweimaligen „Tickens“ der Hemmung in einer Periode spricht man dann vom „Sekundenpendel“.

In der Gleichung für die Schwingungsdauer des *freien Pendel*s kommt die am Ende des Pendelfadens gedachte Masse des Pendels nicht vor; sie ist davon unabhängig.

Pendeluhren: Bei der Anwendung des Pendels in Uhren wird das Pendel periodisch mit dem Antrieb gekoppelt um die Dämpfung des Pendels durch einen Anstoß zu kompensieren. Dadurch wird die Schwingungsdauer vom Antriebsgewicht je nach Stärke der Kopplung mehr oder weniger beeinflusst.

Erst bei späteren Hemmungen ohne Rückfall wie der Grahamhemmung, oder dem freien Pendel von Mannhardt ist das Pendel zeitweise oder ständig so weitgehend vom antreibenden Gewicht entkoppelt, dass seine Schwingungsdauer nicht mehr merklich vom Antriebsgewicht beeinflusst wird.

Vergleich Waaguhr- Spindeluhr: In der Waaguhr und in der Spindeluhr mit starrem Pendel ist die visuell auffallend schwingende Masse (Waag oder Pendel) direkt und dauernd mit dem Antrieb gekoppelt. In beiden wird die potentielle Energie des Antriebsgewichts periodisch in horizontale (Waag) oder vertikale (Spindeluhr) Rotationsenergie umgesetzt, wobei einmal das absinkende Gewicht das rotierenden Teil beschleunigt (Antriebsphase), dann im Rückfall das in seiner Rotation abgebremste Teil das Gewicht wieder anhebt. Im ständigen Kontakt mit den Kronradzähnen erhalten die Spindellappen einen die Dämpfung ausgleichenden resultierenden Impuls.

Daher ist die Schwingungsdauer beider Uhren abhängig vom Antrieb und von Masse und Position (Trägheitsmoment) des Waaggewichts bzw. des Pendels

Im Vergleich der beiden eine Spindelhemmung benutzenden Werke ist die Waaguhr der einfachere Oszillator. Bei ihr pendelt die Energie zwischen dem Antriebsgewicht und der Waag hin und her. Die Spindeluhr mit starrem Pendel ist dagegen ein gekoppeltes Schwingungssystem aus einer „vertikalen Waag“ und einem „Pendel“, auf das zusätzlich zum Gewichtsantrieb die Schwerkraft direkt einwirkt. Inwieweit das Pendel die Frequenz dominiert, hängt von der Kopplung ab.

Beide Oszillatoren sind wegen der großen Ausschläge nichtlinear: die Schwingungsdauer ist also vom Ausschlag und damit vom Antriebsgewicht abhängig, und die Schwingungsform ist nicht genau sinusförmig.

In der Waaghemmung liegt eine zusätzliche Nichtlinearität vor: für große Ausschlagswinkel treibt das Zahnrad innerhalb einer Halbperiode den Spindellappen zeitweise mit seiner Spitze, zeitweise mit seiner geraden Flanke an (Bild 14 und 15). Die führt zu einem momentanen Umschlag der Winkelbeschleunigung und zu einer sehr wirkungsvollen Begrenzung des Ausschlags. Über die detaillierte Dynamik der Waaghemmung wird an anderer Stelle berichtet werden.

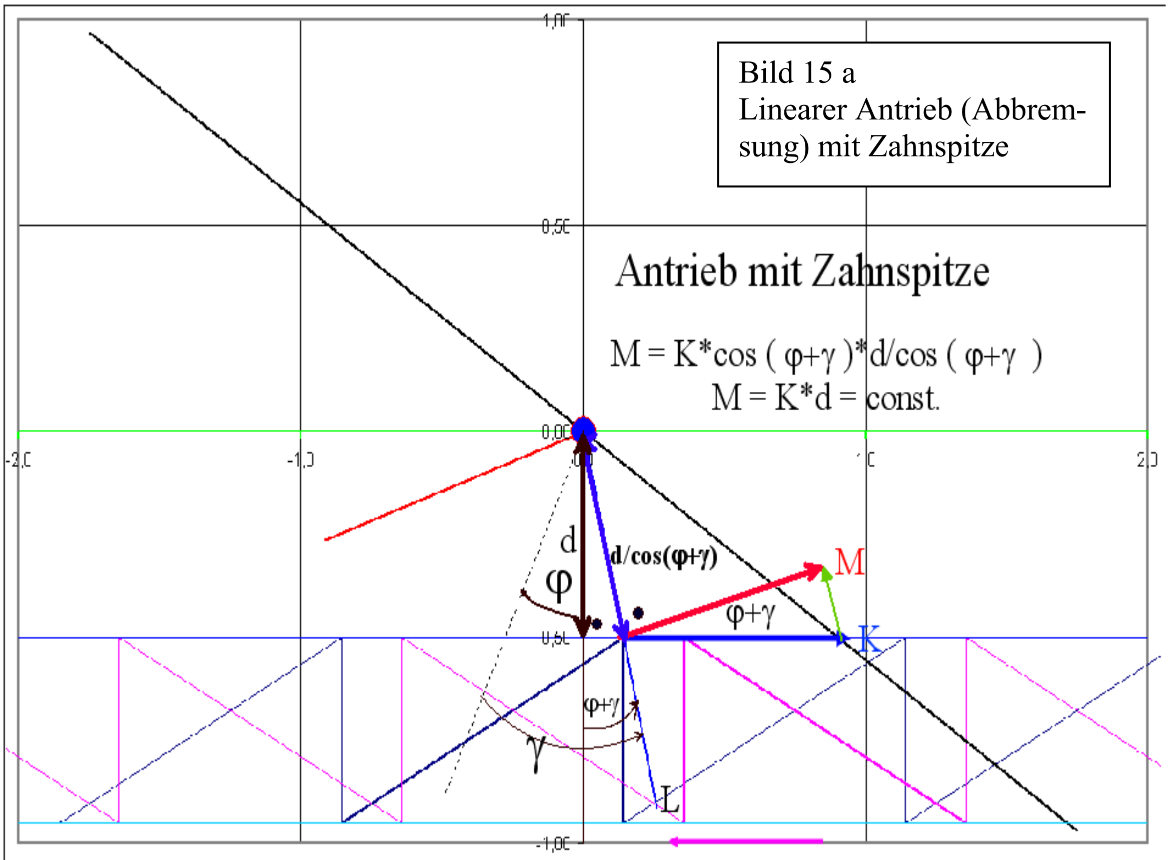


Bild 15 a
Linearer Antrieb (Abbremsung) mit Zahnspitze

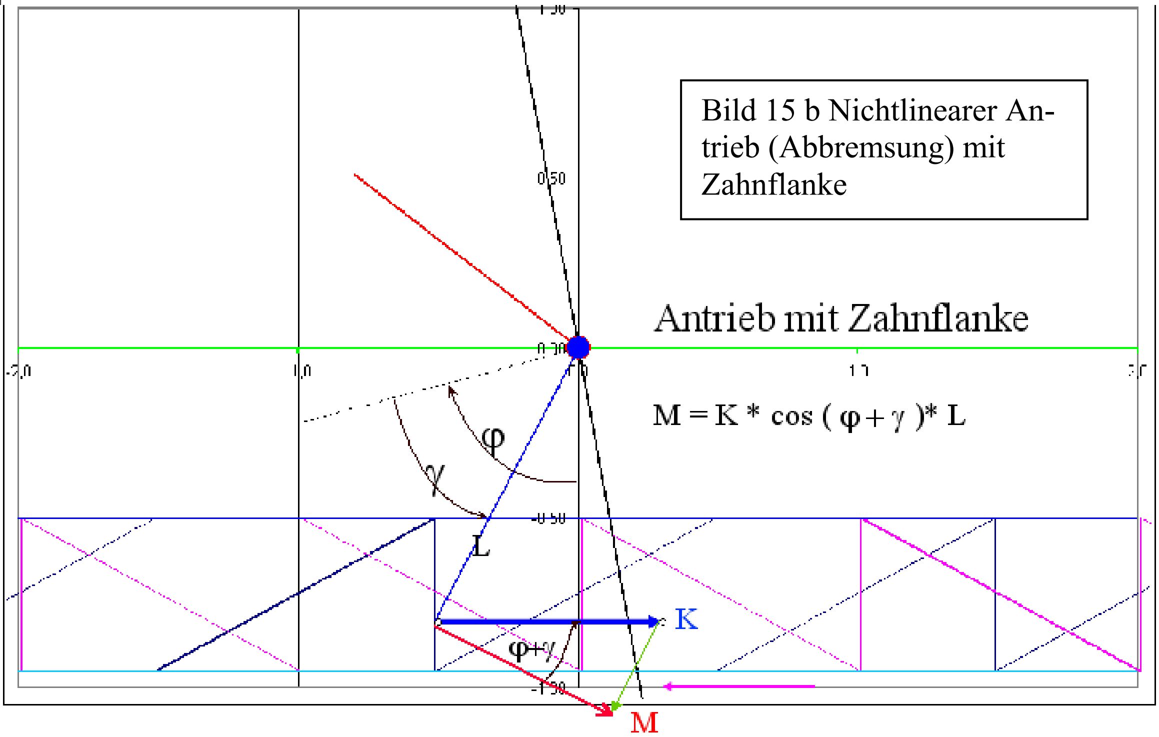


Bild 15 b Nichtlinearer Antrieb (Abbremsung) mit Zahnflanke

12.) Wie stellt sich der Ausschlagwinkel ein?

Lässt man die Waag von einem beliebigen Winkel aus anlaufen, dann stellt sich nach wenigen Schwingungen ein bestimmter Winkel ein, gleichgültig ob der Ausgangswinkel kleiner oder größer war. Wie kommt es dazu?

Die auf an eine Palette der Spindel angreifenden Drehmomente wirken bei Antrieb und Bremsung in der Phase konstanter Beschleunigung ungleich lang (siehe Bild 15b); es überwiegt der Antrieb. Das führt dazu dass in einer idealen Spindelhemmung ohne Fall und Reibung der Ausschlag ständig zunehmen würde, bis der Eingriff verloren ginge.

Dem wirkt bei einer realen Spindelhemmung der mit dem Zahnwechsel verbundene, in einer Halbperiode einmalige, bremsende Impuls (*Fall*) auf die Lappen entgegen. Daraus ergibt sich ein Gleichgewichtsausschlag, der vom *Fall*, vom Antriebsgewicht und vom Waag- Trägheitsmoment abhängt.

In der Praxis kann der *Fall* und der damit verbundene Palettenimpuls nicht beliebig klein gehalten werden; im gegebenen Beispiel begrenzten ihn Ungleichmäßigkeiten der Kronradzähne so, dass der beobachtete Maximalausschlag ±180 Grad nicht wesentlich überschritt.

Nähere Einzelheiten zu diesem interessanten Problem werden in der in Kürze nachfolgenden theoretischen Analyse beschrieben.

13.) Abhängigkeit von Betriebsbedingungen; extrinsische Einflüsse

Aus der experimentell abgeleiteten Gleichung für die Schwingungsperiode der Waag kann man direkt ablesen, welche Betriebsbedingungen extrinsischen Einfluss auf die Ganggenauigkeit haben

$$T = B\sqrt{\frac{RW}{gG}}\sqrt{{p_o}^2 + p^2}$$

Position p

Die Position ist temperaturabhängig weil der Waagbalken sich mit zunehmender Temperatur ausdehnt, was dazu führen sollte dass die Uhr langsamer geht.

Für Eisen ist der thermische Ausdehnungskoeffizient $1{,}2*10^{-5}$ pro Grad. Für ein 1m langes Eisenpendel einen Spindeluhr folgt daraus eine Ausdehnung um $1{,}2*10^{-2}$ mm/Grad und damit ein Nachgehen einer von sonstigen Umwelteinflüssen freien Uhr um rund 1 Sekunde pro Tag und Grad.

Da die wirksame Länge des Waagbalkens kleiner ist als 1 m, sollte unter idealen Verhältnissen dieser Einfluss von Temperaturänderungen bei der Waaguhr kleiner als 1 Sekunde pro Tag und Grad und damit unbeobachtbar sein.

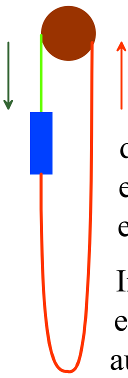
Gewicht G

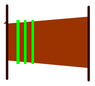
Wichtig ist aus mehreren Gründen die Abhängigkeit vom Gewicht.

Das Kronrad und das Bodenrad haben eine geringe, aber endliche Unwucht, die wie eine periodische Modulation des Antriebsgewichts mit der Umlaufsfrequenz von Bodenrad und Kronrad wirkt. Dies ist eine Kurzzeitmodulation, die sich innerhalb einer Stunde, der Umlaufszeit des Bodenrads, ausmittelt.

Beim Ablauf einer Stunde muss das Bodenrad die Auslösung des Schlagwerks anheben, was das auf die Spindel wirksame Gewicht merklich (in der Größenordnung 100 Gramm x *g*) vermindert. Dies ist ein stündlich periodischer Vorgang, der innerhalb einer Stunde zu unterschiedlicher Minutenanzeige führen würde, sich aber im Stundenverlauf ausmittelt.

Beim täglichen Ablauf des Antriebsgewichts addiert sich das Gewicht des abgelaufenen Seils zum eigentlichen Antriebsgewicht. Die Uhr wird also im Verlauf von 24 Stunden schneller werden Wenn das abgelaufene Seil ein Gewicht von 5% des Antriebsgewichts hat, führt das zu einem Schnellerwerden der Uhr zwischen zwei Aufzügen innerhalb 24 h um 2,5%. Sie wäre am





Ende also 1,2 Minuten schneller als am Anfang.

Diese Schwankung ist tagesperiodisch und wird sich über längere Zeit ausmitteln, wenn der Aufzugsvorgang täglich zur selben Zeit erfolgt und gleich lange dauert. Die Schwankung im Minutenbereich innerhalb eines Tages war damals nicht erkennbar und daher ebenso unwesentlich wie die kurzzeitigen Schwankungen innerhalb einer Stunde.

Im Übrigen wäre diese Fehlerquelle, so man sie denn als solche und als bedeutend erkannt hätte, durch eine leicht konisch geformte Seiltrommel oder durch ein gegenläufig aufgewickeltes Hilfsseil einfach zu kompensieren gewesen (Skizze).

Getriebe R

In den Getriebefaktor R gehen neben den Übersetzungsverhältnissen der Zahnräder die ihnen zugeordneten Hebelarme ein. Eine geringfügige, nicht zu vermeidende Exzentrizität der Getrieberäder bezogen auf ihre Achsen führt zu Kurzzeitmodulationen der Übersetzung, die beobachtbar sind, sich aber schnell ausmitteln.

Faktor B

In B von der Größenordnung 1 gehen alle schwer einzeln zu erfassenden Resteinflüsse ein, z. B die Reibung im Getriebe. Sie dürfte über die Schmierung von Lappen und Lager temperaturabhängig sein, was wohl die beobachtete Temperaturabhängigkeit überwiegend begründet.

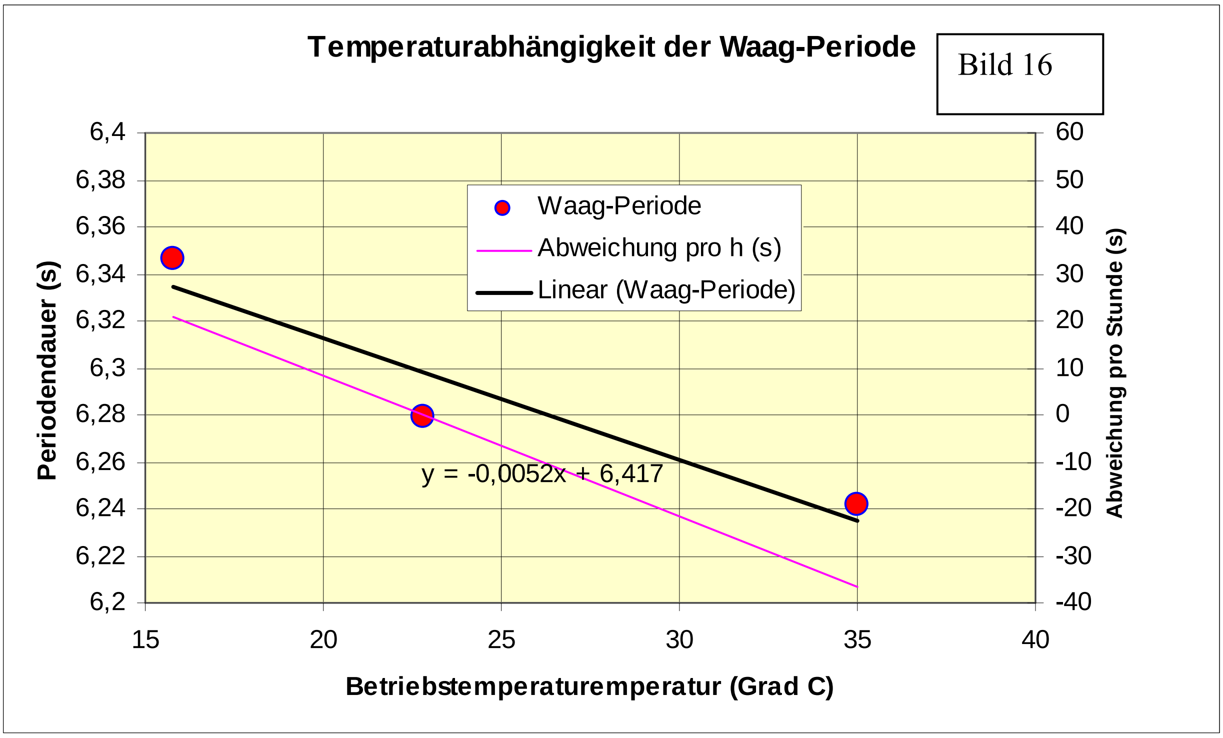
Bei der Unterbringung im Kirchturm traten im Jahresverlauf sehr unterschiedliche Temperaturen auf. Durch die Masse der Kirchtürme dürfte ein klimatisch bedingter Temperaturwechsel kurzzeitig stark abgepuffert worden sein, so dass er langsam und stetig verlief und mit der Überprüfung durch die Sonnenuhr hinreichend korrigiert werden konnte.

14.) Temperaturabhängigkeit

Da sich die Temperaturabhängigkeit des Getriebes als vermutlich größter extrinsischer und nicht kompensierbarer Störfaktor gezeigt hatte, wurde sie direkt bestimmt.

Ergänzend zu den Beobachtungen von Bild 6 wurde die Raumtemperatur in mehreren Stufen von 15 bis 35 Grad C aufgeheizt und nach einer jeweiligen Anpassungsdauer von mehreren Stunden die Waagfrequenz bei annähernd konstanter Temperatur gemessen.

Bild 16 zeigt die Waagperiode bei maximalem Eingriff (Ausschlag ~ ±180 Grad) für 3 unterschiedliche Betriebstemperaturen. Die Messzeit betrug jeweils 1 Stunde, um periodische Kurzzeitschwankungen auszumitteln.



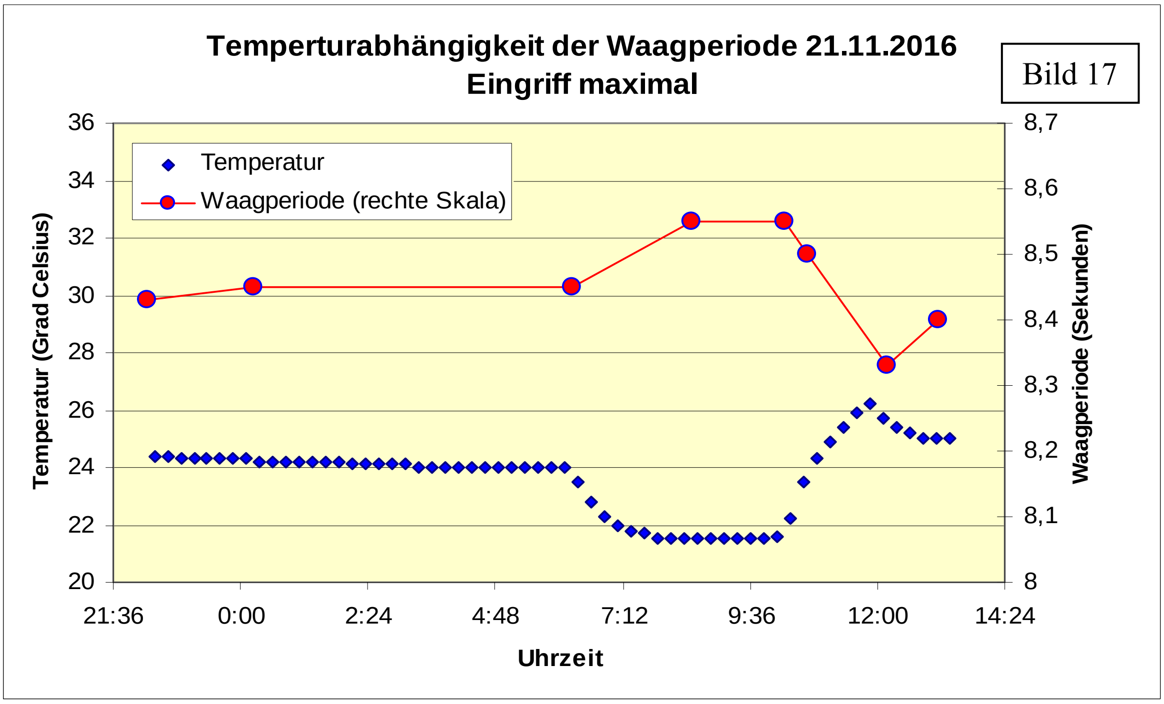
Das Werk war bei 22,8 Grad auf die Sollperiode von 6,27 Sekunden eingestellt worden. Die linke Ordinate zeigt die Periodendauer über einen Temperaturbereich von knapp 20 Grad. Aus der linearen Trendlinie folgt ein Temperaturkoeffizient von 0,0052 s pro Grad und Waagperiode. Daraus errechnet sich eine tägliche Abweichung von 1,2 Minuten pro Grad. Dies ist in Übereinstimmung mit der obigen Abschätzung aus der Langzeitbeobachtung (Abschnitt 6, Bild 6).

Die rechte Skala zeigt die temperaturbedingte Abweichung pro Stunde in Sekunden. Sie ist viel größer als die durch die Wärmeausdehnung der Waag bedingte. Außerdem geht sie in die andere Richtung: mit der Waagausdehnung sollte das Werk bei steigender Temperatur langsamer gehen; tatsächlich geht es schneller.

Eine interessante Frage ist nun wie die Temperaturabhängigkeit von der Eingriffstiefe abhängt.

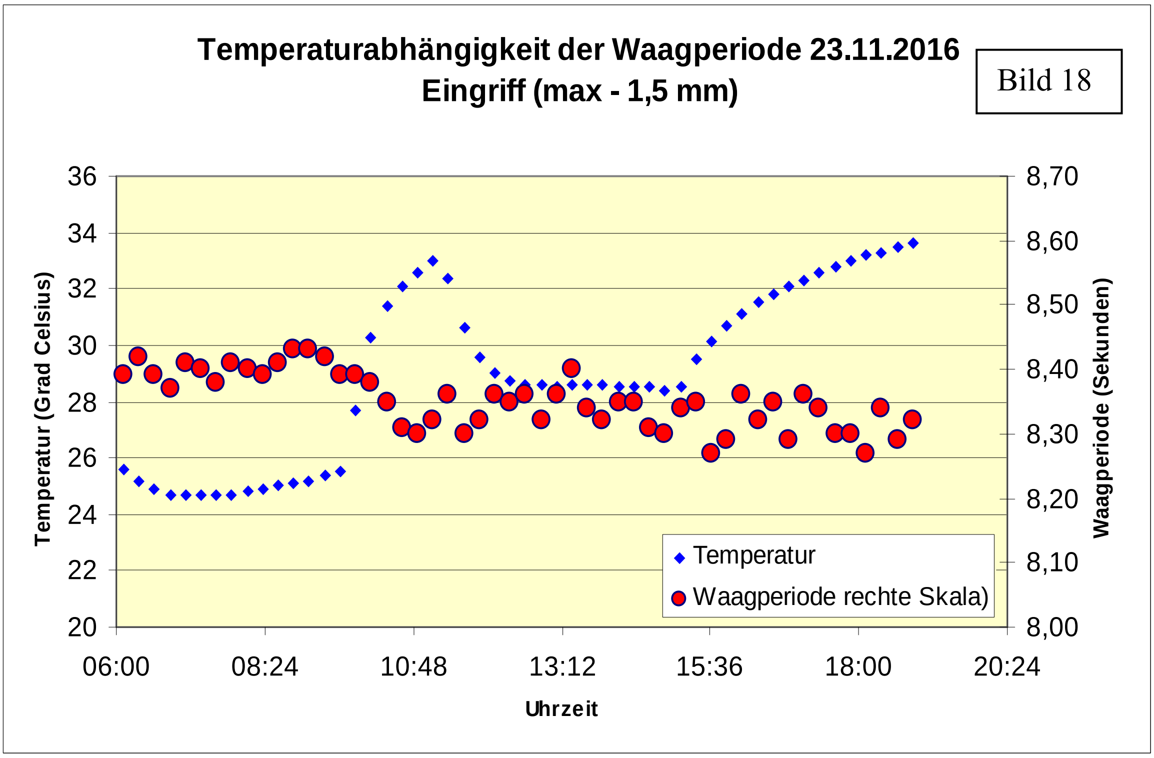
Nach Umrüstung auf eine Periode von 8,37 Sekunden wurde die Temperaturabhängigkeit einmal mit maximalem Eingriff und dann mit einem um bis zu 1,5 mm verringerten Eingriff (siehe Bild 14) bestimmt. Bei diesen Messungen wurde die Temperatur mit einem digitalen Temperaturblogger in 15-minütigem Abstand auf dem PC aufgezeichnet.

Bei der Messung mit maximalem Eingriff (Bild 17) ergab sich eine starke und eindeutige Temperaturabhängigkeit, so dass es ausreichte die Waagperiode in größeren Abständen abzulesen..



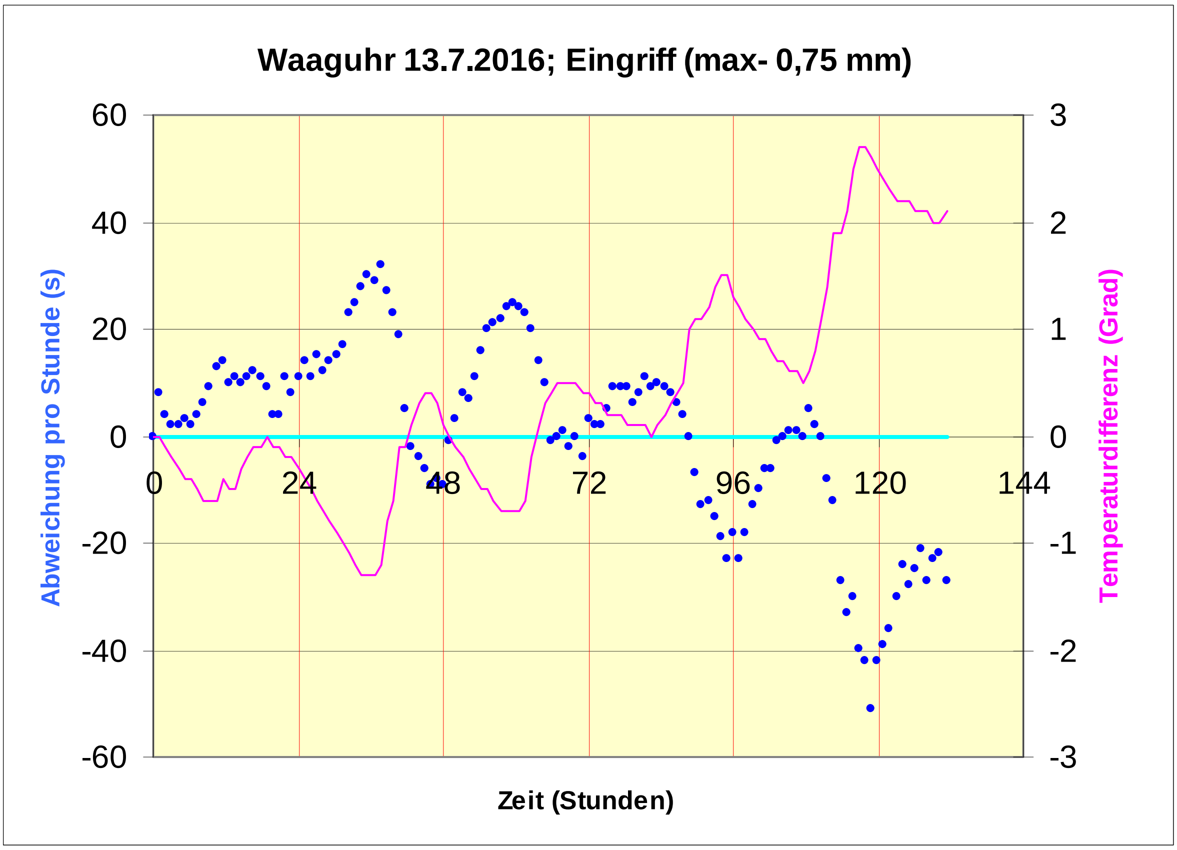
Aus den Messwerten folgt eine Temperaturabhängigkeit von 58 Sekunden pro Grad und Tag. Die passt gut zu den ebenfalls mit maximalem Eingriff gefundenen früheren Werten von 1 bis 1,2 Minuten pro Grad und Tag

Bild 18 zeigt die Ergebnisse für um 1,5 mm deutlich verminderten Eingriff, also erhöhten Fall (Ausschlag ~ ±165 Grad). Die Temperaturabhängigkeit ist wesentlich geringer und innerhalb der Schwankungen gerade noch erkennbar. Deshalb sind hier die Einzelperioden im gleichen engen Zeitraster wie die Temperaturen aufgezeichnet.



Aus den Mittelwerten der Eingangsphase und der Endwerte ergibt sich eine Temperaturabhängigkeit von rund 15 Sekunden pro Grad und Tag, also rund ¼ des Werts bei maximalem Eingriff.

Das folgende Bild 19 zeigt eine längere Messreihe für einen mittleren Eingriff (max - 0,75 mm, Ausschlag ~ ±170 Grad) den Zusammenhang zwischen Temperatur und Waag.-Zeit. Die vertikalen, roten Gitternetzlinien kennzeichnen Tagesabstände.



Die Schwankungen der momentanen Uhrzeit (blau) entsprechen bis ins Detail dem Temperaturverlauf (magenta).

Aus den Extrema der momentanen Zeit (blau) schätzt man für konstante Temperatur eine intrinsische stündliche Schwankung von rund 1 Sekunde pro Stunde ab.

Bei der Waaguhr kann ein Kompromiss zwischen maximalem Ausschlag und Temperaturabhängigkeit gefunden werden, so dass diese nicht über 1/4 Minute pro Tag und Grad beträgt. Da ein mäßiger Fall auch den Vorteil geringerer Ansprüche an die Justiergenauigkeit hat, wird diese Auslegung der frühen Praxis nahekommen.

Ursache der Temperaturabhängigkeit dürfte die Reibung zwischen Kronradzähnen und Spindellappen sein. Es ist plausibel, dass diese vom Eingriff abhängt. Zur Verringerung der Reibung wurde als Schmiermittel beim Start einer Messreihe eine dünne Schicht *biologisches Schmierfett* oder Olivenöl aufgebracht. Dessen Viskosität nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Das vermindert die Reibung, führt aber auch zu größerem Ausschlag, also größeren momentanen Schwankungen. Der Zusammenhang ist also komplex und soll weiter untersucht werden

Bei der **Spindeluhr** mit starrem, leichtem Pendel ist die Reibung eher größer, weil das Getriebe ein zusätzliches Rad hat und die in der Waaguhr vertikale, reibungsarme Aufhängung der Spindel aufgegeben wurde. Es wäre interessant parallele Messungen an solchen Spindeluhren durchzuführen um ein klares Urteil darüber zu finden, ob die Temperaturabhängigkeit bei einer Spindeluhr mit starrer Verbindung zu einem leichten Pendels entscheidend besser ist, und was letztlich die entscheidenden Gründe zum historischen Ausmustern der Großuhren mit Waag waren. Es war sicher nicht die intrinsische Eigenschaft der Waaghemmung als Oszillator.

Einen deutlichen Schritt in der Genauigkeit von Spindeluhren brachte wohl erst das selbständig aufgehängte schwere Pendel. Der große Forschritt kam mit der Ankerhemmung (~1700), mit frei aufgehängtem Pendel kleinen Ausschlags und geringer Kopplung des Pendels an den Antrieb. Der Selbstanlauf der Spindeluhr galt aber auch danach noch als Vorteil gegenüber der leicht stehenbleibenden Ankerhemmung, so dass Spindeluhren vereinzelt noch lang weiter betrieben wurden.

15.) Korrektur- Strategie

Die eindeutige Abhängigkeit des Gangs von der Temperatur lässt es als nicht optimal erscheinen jede Fehlanzeige der Waaguhr sofort durch eine Änderung der Position der Waaggewichte (also der intrinsischen Uhrperiode) zu korrigieren; dies hätte auch nicht die Fehlposition des Auslösestifts für das Schlagwerk korrigiert. Handelt es sich um eine Temperaturschwankung um einen Mittelwert, wird die Uhr von allein wieder zur richtigen Anzeige zurückkehren. Mit Hilfe der Sonnenuhr erkannte Änderungen würde man in diesem Fall besser durch eine kleine Korrektur der Zeigerstellung ausgleichen.

Bei den alten einzeigrigen Uhren war dies in einfacher Weise möglich, da hier das Untersetzungsgetriebe zwischen Bodenrad und Zeigerwelle mit dem daran (und nicht am Bodenrad) befestigten Auslösestift für den Stundenschlag mit ihrer Korrekturmöglichkeit zum Werk gehörte Damit hätte man übrigens auch eine tägliche Korrektur einer längeren Aufzugszeit vornehmen können.

Eine Verschiebung der Waaggewichte wäre erst dann angebracht gewesen, wenn es sich um eine vermutlich längerfristige Temperaturänderung handelte, etwa im Ablauf der Jahreszeiten.

16.) Angaben über die allgemeinen Ganggenauigkeiten von Uhren

Aus Hütte *Des Ingenieurs Handbuch, Theoretische Grundlagen 1955, Seite 1443* kann man Zahlen über die tatsächliche Genauigkeit damals geläufiger Uhrentypen entnehmen. Die angegebenen Ungenauigkeiten sind für uns an Quarzuhren Gewöhnte überraschend hoch, etwa ± 1 – 2 Minuten pro Tag für eine einfache Pendeluhr, oder ± 5 – 10 Minuten für eine Spindel- Taschenuhr (mit Spiralfeder- Oszillator). Diese letzte, 1955 noch präsente Erfahrung war vielleicht Quelle für die sehr schlechte Einschätzung der Genauigkeit der großen Waaguhren, die wir bisher in der Literatur finden.

Tafel 1. Ganggenauigkeit von Uhren
(Abweichung nach 24 Stunden)

Chronometer (Schiff)	<1 s
Pendeluhr mit Sekundenpendel (mit Temperaturkompensation)	<1 s
Uhr mit Ankerhemmung (Taschenuhr bester Qualität)	$\pm 3 \cdots 6$ s
Uhr mit Ankerhemmung (Armbanduhr)	$\pm 0{,}5$ min
Normale Haushalt-Pendeluhr	$\pm 1 \cdots 2$ min
Uhr mit Zylinderhemmung	$\pm 3 \cdots 4$ min
Uhr mit Spindelhemmung	$\pm 5 \cdots 10$ min

17.) Kulturhistorische Schlussbemerkung

Wir sind es gewohnt technische Lösungen in unserer modernen Lebenswelt unter dem Aspekt eines technischen Fortschritts zu beurteilen, der mit einer wissenschaftlichen, physikalisch- mathematischen Systematik ihrer Problembehandlung zusammenhängt. Das Neueste wird bei seinem Erscheinen immer besser als das Vorangehende eingestuft.

Pendeluhren sind in ihrer Entwicklung ein Musterbeispiel für die physikalisch- mathematische Herangehensweise, beginnend mit der sorgfältigen Beobachtung der Schwingung eines Pendels, dann dem Zurückführen seines Verhaltens auf eine einfache Rechenformel für seine Schwingungsperiode und schließlich der Einbettung aller seiner Charakteristika in eine als Formel ganz schlichte lineare Differentialgleichung zweiten Grades, die alle intrinsischen Eigenschaften bis zur genauen Schwingungsform für unbegrenzte Ausschläge enthält, und für die im Übrigen das Pendel nur eine einzige Ausführungsform einer unbegrenzten Zahl unterscheidbarer Oszillatoren einer bestimmten Klasse ist.

Entsprechend wenig trauen wir naiv einer vorwissenschaftlichen Technik zu, die ohne ausgefeiltes mathematisches Werkzeug arbeiten musste, nicht auf Formelsammlungen und Rechenprogramme zurückgreifen konnte. Sie hatte keine hochgenauen Messgeräte zur Verfügung um die Übereinstimmung bestimmter Vorstellungen mit der Wirklichkeit so hinreichend prüfen zu können, dass daraus in der uns gewohnten Weise - in der Symbiose von Hypothese und Verifikation oder Falsifikation im Experiment - schrittweise und schnell immer genauere Modelle und Methoden entstehen. Auch hier ist die Uhr ein gutes Beispiel. Man stelle sich vor, man solle ohne Physik-Lehrbuchkenntnisse, ohne mathematisches Modell, ja ohne über einfaches Rechnen hinausgehende Mathematik zu verwenden, ohne irgendeine genaue Uhr als Messgerät, einen mechanischen Zeitmesser entwickeln, der bei konstanter Temperatur am Tag besser als 1 Minute genau ist und der das bei guter Pflege 200 Jahre lang fortsetzt!

Eine brauchbare Lösung für eine so schwierige Aufgabenstellung konnte in der vorwissenschaftlichen Praxis nur langsam entstehen, da der Lernprozess das reine Sammeln praktischer Erfahrung beim Ausprobieren von Ideen war.

Natürlich hatte man auf verwandte handwerkliche Erfahrung bei einzelnen Komponenten zurückgreifen können; einfache Räderwerke gab es schließlich seit der Antike in Mühlen, Kranen, Bewässerungs- und Kriegsmaschinen. Erfahrung im Bau ungenauer Uhren mit ausströmenden Flüssigkeiten, abbrennenden Kerzen und rieselndem Sand lagen vor; kleine Sanduhren, wie sie bis in die Gegenwart Krankenschwestern zur Messung des Pulses verwendeten, gaben nach der Erfindung der Waaghemmung möglicherweise eine hinreichend genaue Möglichkeit zum groben Einstellen der Waagperiode.

Aber in jener Zeit war dieses Vorwissen eifersüchtig gehütetes Geheimnis von jeweils spezialisierten Handwerkern, übernommen vom eigenen Meister, angereichert mit eigener Erfahrung, weitergegeben an den Sohn. <u>*Es gab keine aktuelle technische Literatur*</u>.

Aber es war ja viel Zeit zur Verfügung! Wenn man bedenkt, dass Waaguhren wohl von 1200 bis 1700 gebaut wurden, waren das über 10 Generationen aufeinanderfolgender Handwerker. Da konnten in einer ersten Generation erfindungsreiche Meister in *trial & error* neben ihrer Haupttätigkeit – vielleicht als Waffen- oder Kunstschmied - Grundkonzepte und Spezialwerkzeuge für ihre Verwirklichung entwerfen und erproben. Die bewährten wurden über lange Zeit unverändert übernommen, wie wir heute an den immer wiederkehrenden Zähnezahlen und Übersetzungen oder der Konstruktion des Werkaufbaus bis ins Detail sehen.

Dabei bildete sich sicher auch schnell ein praktischer Erfahrungsschatz für eine hinreichend stabile Konstruktion aus. Schmiedeeisen war ein teurer Werkstoff, der nicht massiver als nötig eingesetzt werden sollte. Tatsächlich gab es Versuche, vom Bewährten abweichend Material zu sparen. So besitze ich eine Waaguhr, deren Gestell so schwach ausgeführt ist, dass es nachträglich versteift werden musste. Im Allgemeinen ist aber die Dimensionierung recht einheitlich und damit wohl nahe einem Erfahrungs-Optimum für die Waaghemmung (das gilt nicht für Uhren, deren Schlagwerk große Glocken mit schweren Hämmern schlagen mussten; hier bestimmen das Schlagwerk und sein Antriebsgewicht die Dimensionen des Aufbaus).

Die Messergebnisse an einer *Waaguhr im Neuzustand* zeigen, dass mit diesem Uhrentyp in vorwissenschaftlicher Entwicklungsmethode ein intrinsisch vorzüglicher Zeitmesser entstand. Dieser Befund erfüllt mich mit tiefem Respekt vor dem Können der handwerklichen Meister des Mittelalters.

Eine solche Erkenntnis kann man verallgemeinern:

Als Physiker bestaune ich z.B. immer wieder das Ergebnis der Ingenieurkunst, wenn ich vor einem Wolkenkratzer oder vor einer Riesenbrücke stehe. Sie beeindrucken mich als herausragende Ergebnisse solider Technik, entworfen unter Rückgriff auf die standardisierten Tabellenwerke der Ingenieurkunde und in Kenntnis vieler heute auf dem Rechner verfügbarer Vorläufer. Stehe ich dagegen vor einer gotischen Kathedrale in ihrer fragilen Konstruktion und ihrem Reichtum an Gestaltung, dann bewundere ich in ihr ein kreatives Meisterstück voll Erfindungsreichtum, realisiert mit bewundernswertem Mut zum Risiko.

Man könnte die Gedanken ausweiten auf den geheimnisvollen *Mechanismus von Antikythera*, die Kunstwerke des antiken Griechenland, die Infrastrukturbauten im römischen Reich, die Bewässerungssysteme Mesopotamiens,… - ein weites Feld, geeignet unsere Gegenwart und ihre technischen Fähigkeiten geschichtlich angemessen einzuordnen.

Finis

Anhang: Detailaufnahmen des Neubaus einer großen Waaguhr
und Videos ihres Gangs

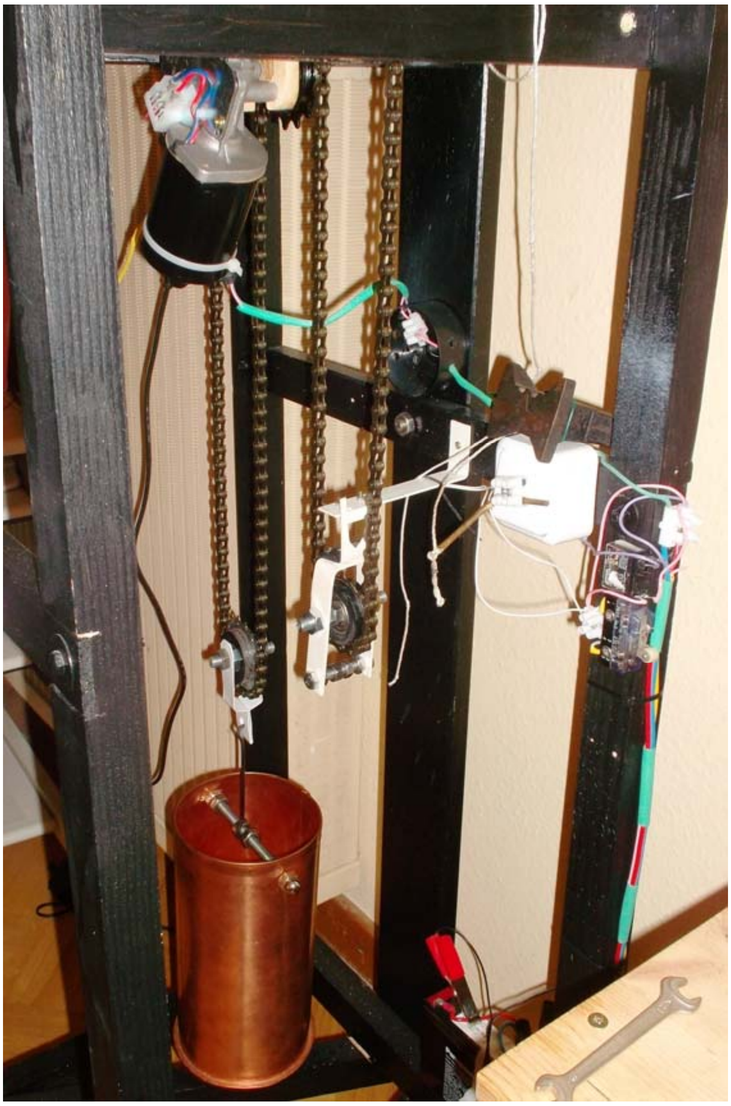


Bild 19: Aufzug mit Getriebemotor, Fahrradkette und –Kettenrädern.
Mitte: Reedschalter und Schaltmagnet
Rechts: Schaltrelais und Überbrückungsschalter,
Dazwischen: Notabschalter mit Seilzug
Unten: 6V- Akku

Bild 20: Reedschalter, zur Sicherheit 2 parallel

Bild 21: Reedschalter für Messung der Waagperiode
Oben: Waag mit Waaggewicht und Schaltmagnet am Ende
Darunter in Abschirmung Reedkontakt

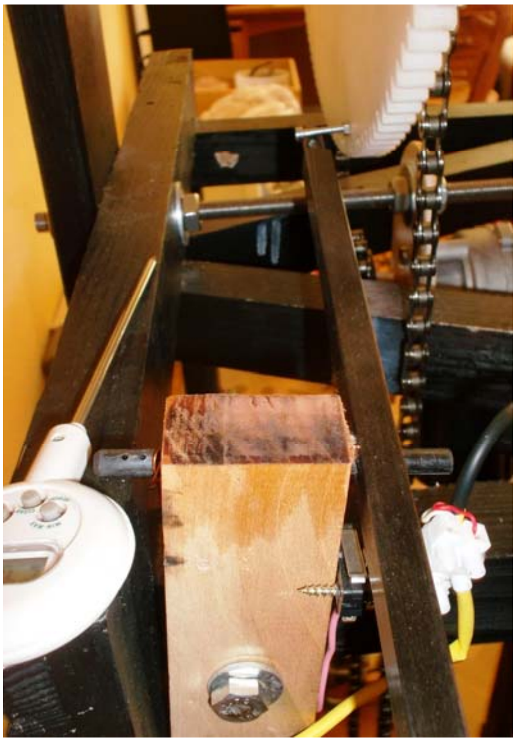


Bild 22: Mitnehmer auf Bodenrad,
Heber zur Auslösung des Stundensignals
Rechts vorn: Ein Prellkontakt löst beim Abfallen des Hebers das Stundensignal aus

Bild 23: Links: Antriebsgewicht Füllung Bleischrot und 1kg-Bleigewichte (hier mit Faden)
Rechts: kleines Gegengewicht zum Spannen der Kette

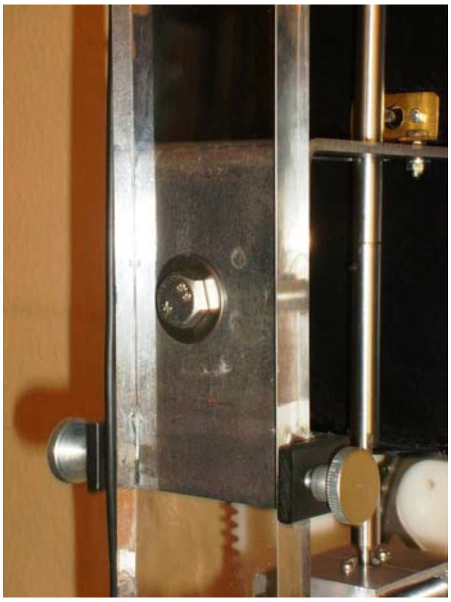


Bild 24:Vorrichtung zum Einjustieren der Kronradachse auf die Spindelachse

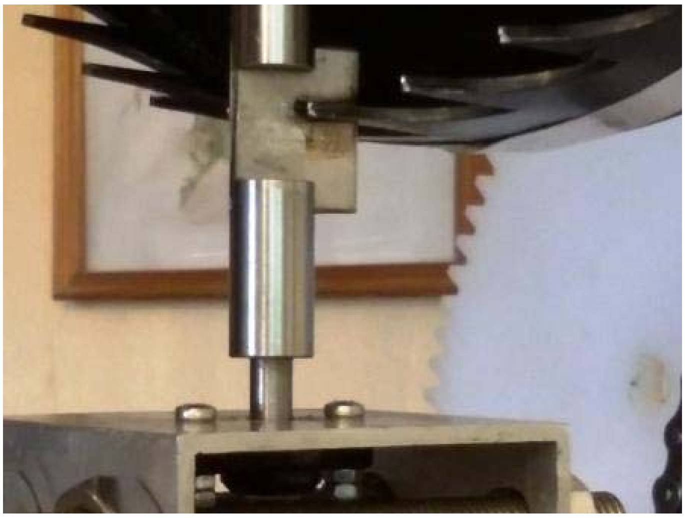

Bild 2 5: Werkansicht

Video 1 der Waagschwingung

Öffnen Sie mit Ihrem Videoprogramm die Datei ***Ausschlag.mp4*** . Sie befindet sich im gleichen zip- Verzeichnis wie die Textdatei.

Gezeigt wird die Schwingung des Waagbalkens bei maximalem Eingriff, mit einem Ausschlag > ± 180 Grad.

Video 2 des Paletteneingriffs



Öffnen Sie mit Ihrem Videoprogramm die Datei ***Eingriff.mp4***. Sie befindet sich im gleichen zip-Verzeichnis wie die Textdatei.

Gezeigt wird der Eingriff der Kronradzähne auf die untere Spindelpalette, bei maximalem Eingriff. Man erkennt die Tiefe des Eingriffs und das Umklappen des Hebelarms beim periodischen Wechsel vom Antrieb mit Zahnspitze auf Antrieb mit Zahnflanke.

=============================