

Kap. III Allgemeine Formulierung der QM.

- 1) Der Hilbertraum, Dirac Notation.
- 2) Lineare Operatoren.
- 3) Postulate der QM.
- 4) Unschärferelation, Zeitevolution, Bewegungsgleichungen für Operatoren.
- 5) Dichtematrix Formulierung.
- 6) Pfadintegral Formulierung.

a) Hilbertraum, Dirac-Notation.

QM System \longrightarrow Menge von Zustände (z.b. Zustände Teilchen in unendliche Potentialtopf. $\psi_n(x)$)

Zustände identifizieren wir zu Vektoren $|\alpha\rangle$ in abstrakte **Hilbertraum** \mathcal{H}

$$\text{Ket. } |\alpha\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\infty \end{pmatrix} \quad a_i \in \mathbb{C} \quad \text{z.b. } |n\rangle \rightarrow \psi_n(x)$$

Duale Zustand Vektor zu $|\alpha\rangle$

$$\text{Bra. } \langle\alpha| \rightarrow (a_1^*, \dots, a_\infty^*)$$

$$\text{Skalarprodukt. } |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle\alpha|\beta\rangle \rightarrow a_1^* b_1 + \dots + a_\infty^* b_\infty$$

$$\text{Orthogonalität. } \langle\alpha|\beta\rangle = 0 \Rightarrow |\alpha\rangle, |\beta\rangle \quad \text{Orthogonal zueinander.}$$

Norm (durch Skalarprodukt induziert)

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle} \quad \text{Es gilt } \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$
$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$$

Basis Vollständig Orthonormalsystem (**VONS**)

$\exists |\phi_n\rangle, n=1 \dots \infty, \in \mathcal{H}$ so dass:

1) $\forall |\alpha\rangle \in \mathcal{H} \quad |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \alpha \rangle$ Vollständigkeit.

2) $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ Orthonormal.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |\phi_n\rangle = 0 \Rightarrow a_i = 0 (i:1 \dots \infty)$ Linear unabhängig

Darstellung des Eins.

Aus Vollständigkeit folgt:

$$\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n |$$

Beispiel.

a)

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geeignet für zwei-niveau System.

Darstellung der Eins.

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

b) **Impuls und Ort Basen**, Teilchen in \mathbb{R}^3

$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow$ Teilchen mit Impuls \mathbf{p}

$|\mathbf{x}\rangle \rightarrow$ Teilchen am Ort \mathbf{x}

Orthogonal $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$,

$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$,


Vollständigkeit. $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| = \mathbf{1}$

$\int d^3\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}| = \mathbf{1}$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle \mathbf{p} | \Psi \rangle = \tilde{\Psi}(\mathbf{p})$

$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \Psi(\mathbf{x})$

Basis Transformationen.

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{1} | \psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle}_{= e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \tilde{\psi}(\mathbf{p})\end{aligned}$$


Vergleich Kap. II.
(De Broglie)

Norm

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \int d^3 \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2$$

2) Linear Operatoren $\hat{\mathbf{A}}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a\hat{\mathbf{A}}|\alpha\rangle + b\hat{\mathbf{A}}|\beta\rangle$ mit $\hat{\mathbf{A}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Adjungiert Operator. $\hat{\mathbf{A}}^+ : \langle\beta|\hat{\mathbf{A}}|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\hat{\mathbf{A}}^+|\beta\rangle)^*$

Kommutator: $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$

Funktion eines Operators ist durch Taylor Entwicklung definiert: $\exp(\hat{\mathbf{A}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{A}}^n}{n!}$

Operatoren lassen sich als **Matrizen Darstellen:**

$$\text{Sei } \{|n\rangle\} \text{ VONS } \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_{n,m} \underbrace{\langle n|\hat{\mathbf{A}}|m\rangle}_{=A_{n,m}} |n\rangle\langle m|$$

$\hat{\mathbf{A}}$ Hermitesch: $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+$

$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \exists \{|\alpha_n\rangle\} \mid \{|\alpha_n\rangle\} \text{ VONS und } \hat{\mathbf{A}}|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle \text{ mit } a_n \in \mathbb{R}$

$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_n a_n |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$ **Spektral Darstellung eines hermitesch Operator.**

Erwartungswert eines Operator für den Zustand $|\psi\rangle$: $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \langle \psi | \hat{\mathbf{A}} | \psi \rangle$

Messgrößen entsprechen hermiteschen Operatoren. $\hat{\mathbf{A}}^+ = \hat{\mathbf{A}} \Rightarrow \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \sum a_n |\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$

Beisp. Hamilton Operator Diskrete Spektrum.

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}^+, \quad \hat{\mathbf{H}} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle, \quad \hat{\mathbf{H}} = \sum_n E_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

Impuls Operator Kontinuierliche Spektrum.

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^+, \quad \hat{\mathbf{P}} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|$$

$$\langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{P}} | \mathbf{x}' \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{x}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Ort Operator Kontinuierliche Spektrum.

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}^+, \quad \hat{\mathbf{X}} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle, \quad \hat{\mathbf{X}} = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|$$

3) Postulate der QM.

P1. Jedes Zustand eines QM System wird durch ein Element $|\psi\rangle$ des Hilbertraumes \mathcal{H} beschrieben.

P2. Messbaren Größen (Observablen) entsprechen hermitesche Operatoren.

P3. Erwartungswert einer Observablen $\hat{\mathbf{A}}$ in einem gegebenen Zustand $|\psi\rangle$ wird durch $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \langle \psi | \hat{\mathbf{A}} | \psi \rangle$ gegeben.

P4. Die Zeitentwicklung der Zustände wird durch den Hamilton Operator bestimmt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

P5. Es können für einen Observablen $\hat{\mathbf{A}}$ nur die Eigenwerte als Messergebnis auftreten.

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_n a_n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| \quad \text{und} \quad \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \sum a_n |\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$$

$|\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit Messergebnis a_n zu erhalten.

Falls a_n gemessen wird dann geht der Zustand des Systems in den entsprechenden

Eigenzustand $|\alpha_n\rangle$ (collapse of the wave function)

(Zur Messungen: J. von Neumann, Mathematical foundations of QM, D. Bohm: Quantum theory, Messiah, Quantum mechanics)

4) Unschärferelation:

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{\mathbf{A}}, \quad \hat{\mathbf{B}}^\dagger = \hat{\mathbf{B}}, \quad \Delta \mathbf{A}^2 = \left\langle \left(\hat{\mathbf{A}} - \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle \right)^2 \right\rangle$$

Standardabweichung vom Mittelwert.

$$\Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] | \psi \rangle \right| \quad \text{Beisp: } [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{X}}] = \frac{\hbar}{i} \quad \text{so dass } \Delta \mathbf{P} \Delta \mathbf{X} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Zeitevolution für Zeit unabhängige Hamilton Operator.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad \text{Def: } |\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

Aus Schr. Gl.: $\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}$

Damit ist:

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\hat{H}/\hbar}$$

$$\hat{U}(t, t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) = 1$$

(da $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$)

Zeitevolution Operator für Zeitabhängige Hamilton Operatoren $\hat{H}(t)$

Def: $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$

Aus Schr. Gl. : $\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}$

➤ $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0), \quad t > t_1 > t_0$

➤ U ist Unitär. $\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{1}$

➤ Dyson Reihe.

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \cdots \hat{H}(t_n)$$

Bem: Falls $\hat{H}(t) = \hat{H}$ liefert die Dyson Reihe: $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)\hat{H}/\hbar}$

Bewegungsgleichungen des Operatoren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}} |\psi(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar} |\psi(t=0)\rangle$$

$$\langle \psi(t) | \hat{\mathbf{A}} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t=0) | \underbrace{e^{i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar} \hat{\mathbf{A}} e^{-i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar}}_{=\hat{\mathbf{A}}(t)} | \psi(t=0) \rangle$$

$\hat{\mathbf{A}}(t)$: Heisenberg-Darstellung.

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{A}}(t)]$$

Ehrenfest Theorem

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}})$$

Im Ortsdarstellung gilt: $m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{\mathbf{X}}(t) \rangle = -\langle \nabla_x V[\hat{\mathbf{X}}(t)] \rangle = \langle F[\hat{\mathbf{X}}(t)] \rangle$ Ähnlich zu Newton.

Äquivalenz ist nicht streng da im allgemein: $\langle F[\hat{\mathbf{X}}(t)] \rangle \neq F(\langle \hat{\mathbf{X}}(t) \rangle)$

5) Dichtematrix Formulierung.

Reine Zustand. $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ Dann gilt $\langle\hat{\mathbf{A}}\rangle = \langle\psi|\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\mathbf{A}}]$

Gemischte Zustand.

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad \text{Dann gilt} \quad \langle\hat{\mathbf{A}}\rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\mathbf{A}}] = \sum_n p_n \langle\psi_n|\hat{\mathbf{A}}|\psi_n\rangle$$

p_n : Wahrscheinlichkeit dass reine Zustand $|\psi_n\rangle$ vorkommt.

Beispiel (Rein)

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{mit} \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + e^{i\varphi} |\psi_2\rangle), \quad \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{i,j}$$

$$\text{Tr}[\hat{\mathbf{A}}\hat{\rho}] = \frac{1}{2}(\langle\psi_1|\hat{\mathbf{A}}|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\hat{\mathbf{A}}|\psi_2\rangle + 2\text{Re}[\langle\psi_1|\hat{\mathbf{A}}|\psi_2\rangle e^{i\varphi}])$$

Beispiel (Gemischte)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|)$$

$$\text{Tr}[\hat{\mathbf{A}}\hat{\rho}] = \frac{1}{2}(\langle\psi_1|\hat{\mathbf{A}}|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\hat{\mathbf{A}}|\psi_2\rangle)$$

Beispiel: QM System bei endliche Temperatur, T.

$$\hat{\mathbf{H}}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \quad \text{mit} \quad p_n = e^{-E_n/k_B T} / \sum_n e^{-E_n/k_B T}, \quad k_B : \text{Boltzmann Konst.}$$

Einen gemischten Zustand können wir nicht als Vektor im Hilbertraum Darstellen, da er nicht einen Linearkombination (kohärent Überlagerung) von mehreren Zuständen entspricht !

Zeitevolution der Dichtematrix.

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\rho}(t)]$$

Bewegungsgleichung für Operatoren in Heisenberg Darstellung.:

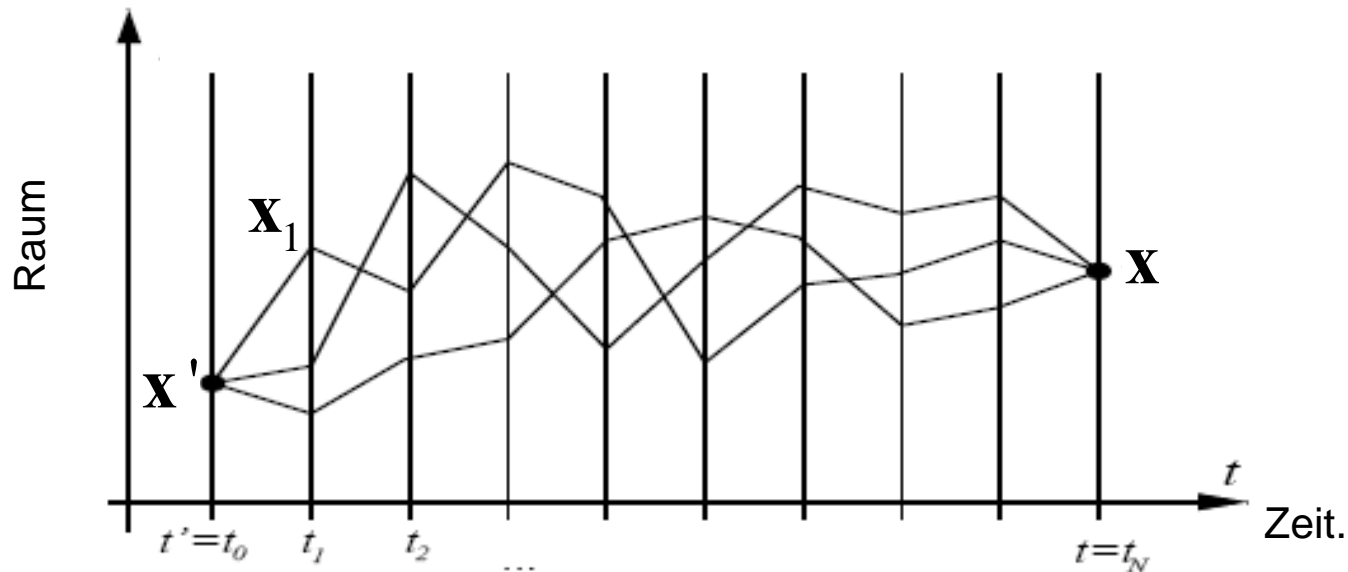
$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{A}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{A}}(t)]$$

6). Pfad Integral Formulierung.

Propagator:

$$t_j = t' + j \frac{t-t'}{N} \quad j=0,1,\dots,N \quad t' < t$$

$$\begin{aligned}
 K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t-t') &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\hat{H}(t-t')/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle = \\
 &= \int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} \langle \mathbf{x} | e^{-it\hat{H}(t-t_{N-1})/\hbar} | \mathbf{x}_{N-1} \rangle \langle \mathbf{x}_{N-1} | e^{-it\hat{H}(t_{N-1}-t_{N-2})/\hbar} | \mathbf{x}_{N-2} \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_1 | e^{-it\hat{H}(t_1-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle \\
 &= \int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{N-1}, t_N - t_{N-1}) K(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_{N-2}, t_{N-1} - t_{N-2}) \cdots K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', t_1 - t_0)
 \end{aligned}$$



Für: $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}})$ gilt

$$K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j-1}, t_j - t_{j-1} = \varepsilon) \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon \ll 1}}{\cong} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \right)$$

so dass:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') =$$

$$\int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{N-1}, t_N - t_{N-1}) K(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_{N-2}, t_{N-1} - t_{N-2}) \cdots K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', t_1 - t_0) \cong$$

$$\int \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3(N-1)/2} d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \varepsilon \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \right)$$

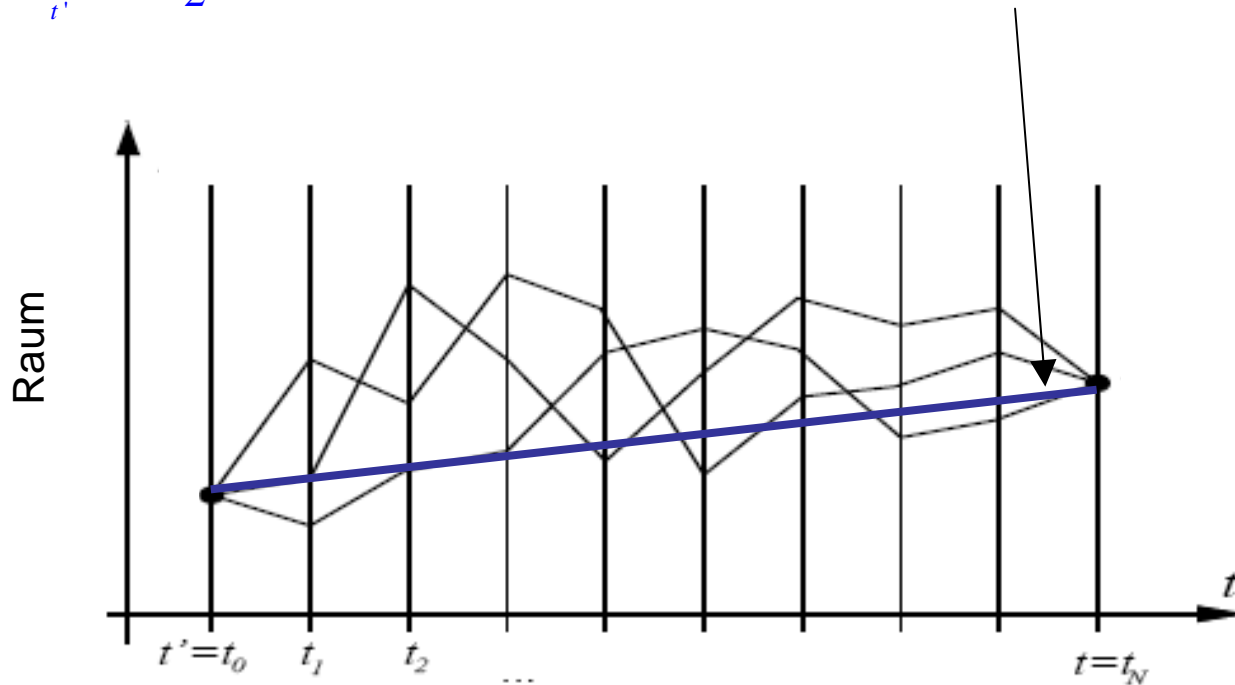
$$\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \cong \dot{\mathbf{x}}(t_j) \quad , \quad \sum_{j=1}^N \varepsilon \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \approx \int_{t'}^t ds \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s))$$

$$\int \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3N/2} d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} = \int \{ D\mathbf{x}(s) \} \quad \text{Integral über alle Pfade}$$

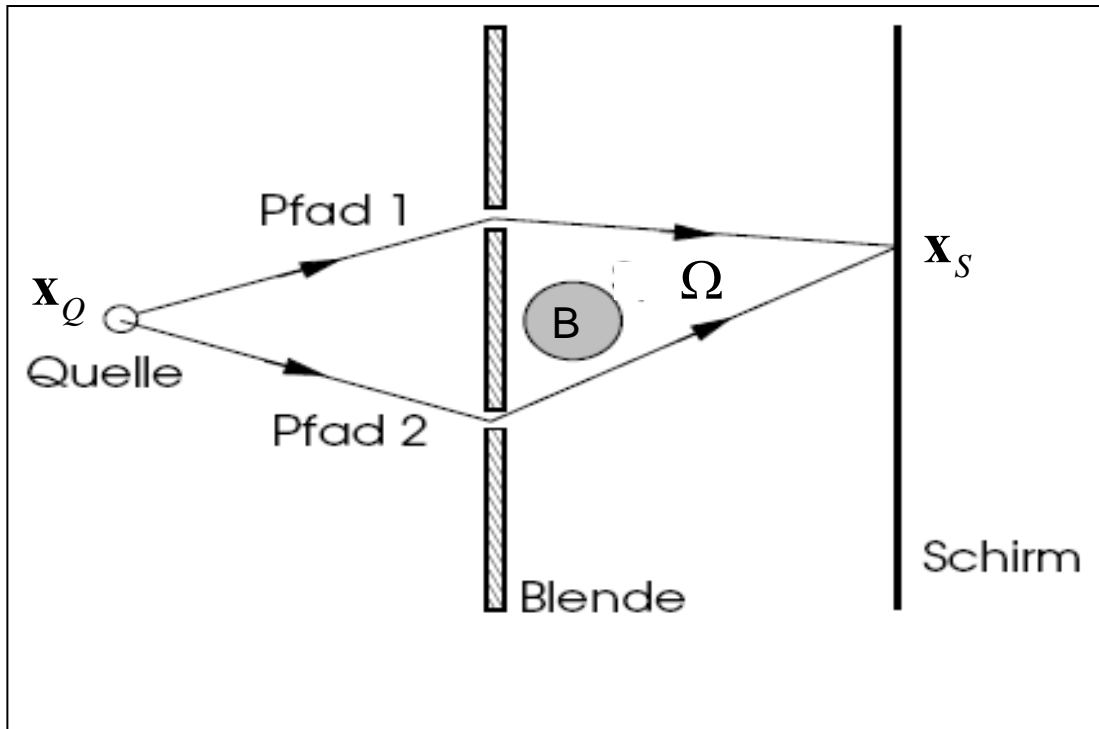
$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \cong \int \{D\mathbf{x}(s)\} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t ds \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s))}_{=L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})} \right)$$

$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$: Klassische Lagrange Funktion.

$$\delta \int_{t'}^t ds \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s)) = 0 \quad \text{Klassische Pfad.}$$



Beisp: Aharonov-Bohm Effekt (1959).



$$K(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_Q, t) \approx$$

$$\sum_{\text{Pfad}, j=1,2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds L(\mathbf{x}_j(s), \dot{\mathbf{x}}_j(s))\right)$$

Mit

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m \dot{\mathbf{x}}^2 / 2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

(cgs Einheiten) und

$$\psi(\mathbf{x}, t=0) \approx \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q)$$

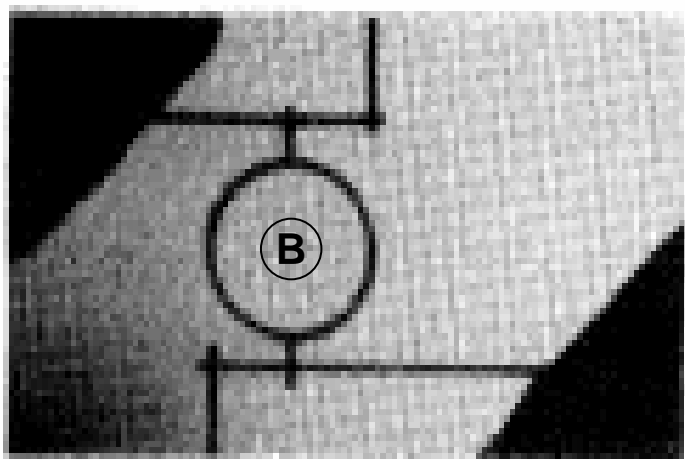
$$|\psi(\mathbf{x}_S, t)|^2 \approx |K(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_Q, t)|^2 \approx |K_1^0|^2 + |K_2^0|^2 + 2 \operatorname{Re}(K_1^{0*} K_2^0 e^{2\pi i \Phi / \Phi_0})$$

$$K_j^0 = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\text{Pfad } j} ds m \dot{\mathbf{x}}_j^2(s)/2}, \quad \Phi = \int_{\Omega} d\Omega \cdot \mathbf{B}, \quad \Phi_0 = 2\pi\hbar c / e \quad \text{Magnetische Fluss Quanta}$$

Interferenz Muster ändert sich periodisch mit Periode Φ / Φ_0 . Effekt hängt nur von Mag. Fluss durch Ω

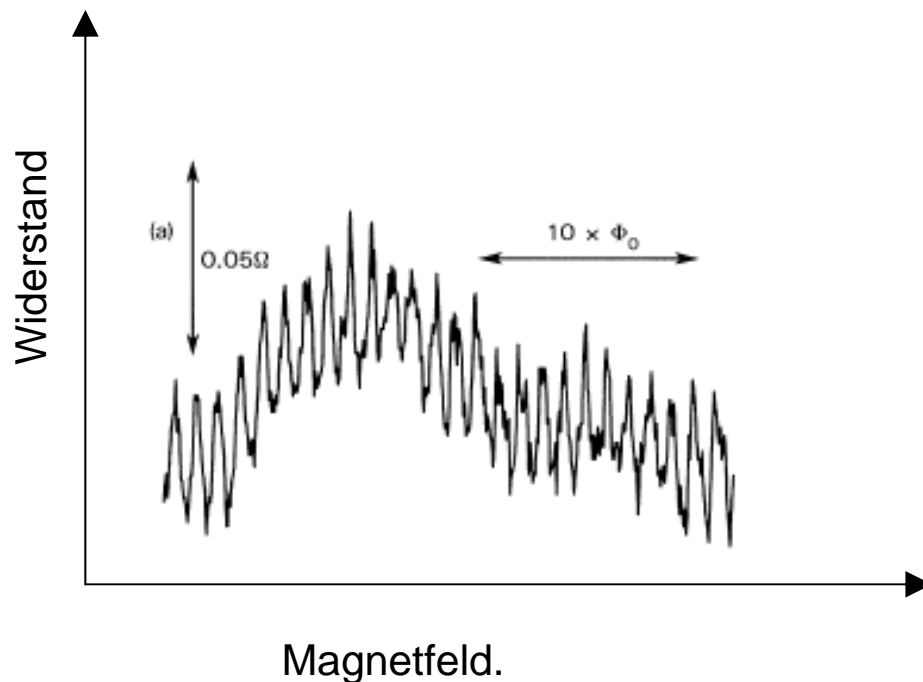
Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings

R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz
IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York 10598
(Received 27 March 1985)



7

Mesokopischer Metallischer Ring.



The inset is a photograph of the larger ring. The inside diameter of the loop is 784 nm, and the width of the wires is 41 nm.