Symmetrie und Erhaltungssätze

1) Kontinuierliche Symmetrien (Drehungen, Translationen)
2) Diskrete Symmetrien (Pariät, Zeitumkehr)
3) Eichtransformationen.

Siehe Sakurai. (Modern Quantum Mechanics Kap. IV.)

1) Kontinuierliche Symmetrien.

Sei $\hat{\mathbf{K}} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots, \hat{K}_n), \quad \hat{K}_i^\dagger = \hat{K}_i$

$\hat{\mathbf{K}}$ erzeugt Unitäre Transformation:

$$\hat{U}(\mathbf{e}, \Theta) = e^{-i\mathbf{e}\bullet\hat{\mathbf{K}}\Theta/\hbar} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n, \ |\mathbf{e}| = 1, \ \Theta \in \mathbb{R}$$

Sei $\hat{H}$ Hamilton Operator mit

$$\hat{U}^\dagger(\mathbf{e}, \Theta)\ \hat{H}\ \hat{U}(\mathbf{e}, \Theta) = \hat{H} \quad \forall \mathbf{e}, \Theta$$

dh. $\hat{H}$ Invariant unter $\hat{U}(\mathbf{e}, \Theta)$

Konsequenzen:

1) $\left[\hat{H},\ \hat{U}(\mathbf{e}, \Theta)\right] = 0, \quad \left[\hat{H},\ \hat{K}_i\right] = 0 \ \ \forall i$

2) $\hat{\mathbf{K}}$ ist eine Erhaltungsgröße. Mit $\hat{\mathbf{K}}(t) = e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{\mathbf{K}}\, e^{-it\hat{H}/\hbar}$ ist

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{K}}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{K}}(t)\right] = 0 \qquad \text{so dass} \qquad \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{\mathbf{K}}(t)|\psi\rangle = 0$$

3) $\left[\hat{H}, \hat{K}_1\right] = 0 \quad => \quad \exists \;\; VONS, \;\; |n,m\rangle, \quad |$

$$\hat{K}_1|n,m\rangle = k_m|n,m\rangle \;\text{und}\; \hat{H}|n,m\rangle = E_{n,m}|n,m\rangle$$

k_m ist eine gute Quantenzahl. d.h. Sei:

$$\hat{K}_1|\phi_m\rangle = k_m|\phi_m\rangle \quad \text{dann gilt} \quad \hat{K}_1|\phi_m(t)\rangle = k_m|\phi_m(t)\rangle$$

4) Sei $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ dann ist $\hat{H}\,\hat{U}(\mathbf{e},\Theta)|\Psi\rangle = E\,\hat{U}(\mathbf{e},\Theta)|\Psi\rangle$

Translationen

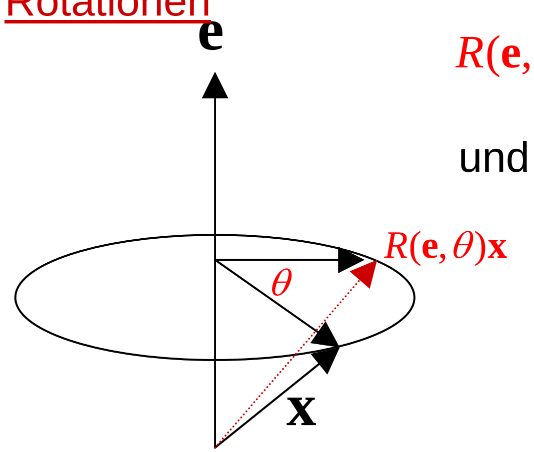
$$\hat{T}_{\mathbf{a}} = e^{-i\,\mathbf{a}\bullet\hat{\mathbf{P}}/\hbar}$$

$\hat{\mathbf{P}}$ Impuls

$$\hat{T}_{\mathbf{a}}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle, \qquad \hat{T}_{\mathbf{a}}|\mathbf{p}\rangle = e^{-i\mathbf{a}\bullet\mathbf{p}/\hbar}|\mathbf{p}\rangle$$

Falls $\hat{H}$ invariant unter Translationen ist, dann ist Impuls erhalten.

Rotationen



$$R(\mathbf{e},\theta)\mathbf{x} = \mathbf{e}\bullet(\mathbf{e}\times\mathbf{x}) - \cos(\theta)\,\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{x}) + \sin(\theta)\,\mathbf{e}\times\mathbf{x}$$

und es gilt: $\dfrac{d}{d\theta}R(\mathbf{e},\theta)\mathbf{x} = \mathbf{e} \times R(\mathbf{e},\theta)\,\mathbf{x}$

Damit ist: $R(\mathbf{e},\theta)\mathbf{x}$ ist Lösung der Dgl.

$$\frac{d}{d\theta}\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{e} \times \mathbf{x}(\theta) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(\theta=0) = \mathbf{x}$$

Drehimpuls, $\hat{\mathbf{L}}$, ist Erzeuger von Rotationen.

Sei $$\hat{T}(\mathbf{e},\Theta) = e^{-i\mathbf{e}\bullet\hat{\mathbf{L}}\Theta/\hbar}$$

Transformation der Operatoren

$$\hat{T}^{\dagger}(\mathbf{e},\Theta)\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{X}}\\ \hat{\mathbf{P}}\\ \hat{\mathbf{L}}\end{Bmatrix}\hat{T}(\mathbf{e},\Theta) = R(\mathbf{e},\Theta)\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{X}}\\ \hat{\mathbf{P}}\\ \hat{\mathbf{L}}\end{Bmatrix}$$

Transformation der Kets.

$$\hat{T}(\mathbf{e},\Theta)|\mathbf{x}\rangle = \left|R(\mathbf{e},\Theta)\mathbf{x}\right\rangle$$

$$\hat{T}(\mathbf{e},\Theta)|\mathbf{p}\rangle = \left|R(\mathbf{e},\Theta)\mathbf{p}\right\rangle$$

Beisp:

Für $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{|\mathbf{x}|}$ ist: $\hat{T}^\dagger(\mathbf{e},\Theta)\ \hat{H}\,\hat{T}\,(\mathbf{e},\Theta) = \hat{H}$ => $\left[\hat{H}\,,\ \hat{\mathbf{L}}\right] = 0$

Die Operatoren $\hat{H}\,,\ \hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z$ kommutierien alle miteinander. => Stationäre zustände: $|n,l,m\rangle$,

$$\hat{\mathbf{L}}^2\,|n,l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|n,l,m\rangle,\ \hat{L}_z\,|n,l,m\rangle = \hbar m|n,l,m\rangle,\ \hat{H}\,|n,l,m\rangle = E_{n,l}\,|n,l,m\rangle$$

Da $\left[\hat{H}\,,\ \hat{L}_\pm\right] = 0$ ist die Energie unabhängig von m und ist deshalb mindestens 2l+1 mal entartet.