

Mathe für QM Fokus. Zusammenfassung.

- I) Der Hilbertraum. Vollständiger, unitärer Raum.
 - a) Vollständiges Orthonormalsystem (VONS).
 - b) Lineares Funktional, dualer Raum, Dirac Notation.
 - c) Lineare Operatoren im Hilbertraum.
 - d) Direkte Summe und Tensor Produkt zwei Hilberträume.
- II) Distributionen
- III) Fourier Transformationen. Faltung und bedeutung.

I. Definitionen.

Def: **Körper** K . Menge M mit zwei Operationen $+: K \times K \rightarrow K$ und $\bullet: K \times K \rightarrow K$

$\forall x, y, z \in K$ gilt

$$K1) \quad x + y = y + x, \quad x \bullet y = y \bullet x$$

Kommutativität

$$K2) \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

Assoziativität

$$K3) \quad x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

Distributivität

$$K4) \quad \exists 0, 1 \in K \text{ mit } 0 \neq 1 \mid \forall x \in K \quad x + 0 = x, \quad x \bullet 1 = x$$

$$K5) \quad \forall x \in K \quad \exists y \in K \mid x + y = 0, \quad y = -x$$

$$\forall x \in K \quad \exists y \in K \mid x \bullet y = 1, \quad y = 1/x$$

Beisp. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def: Vektorraum V: Menge M von Vektoren und Körper K mit folgenden Eigenschaften.

$\forall \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in M \quad \alpha, \beta \in K$ gilt

Addition: $+ : M \times M \rightarrow M$

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{f}$$

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h} = \mathbf{g} + (\mathbf{f} + \mathbf{h})$$

$$\exists \mathbf{0} \in M \mid \forall \mathbf{f} \in M \quad \mathbf{f} + \mathbf{0} = \mathbf{f}$$

$$\forall \mathbf{f} \in M, \exists \mathbf{h} \in M \mid \mathbf{f} + \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Multiplikation: $\bullet : K \times M \rightarrow M$

$$\alpha \bullet (\mathbf{f} + \mathbf{h}) = \alpha \bullet \mathbf{f} + \alpha \bullet \mathbf{h}$$

$$(\alpha + \beta) \bullet \mathbf{f} = \alpha \bullet \mathbf{f} + \beta \bullet \mathbf{f}$$

$$(\alpha \bullet \beta) \bullet \mathbf{f} = \alpha \bullet (\beta \bullet \mathbf{f})$$

$$\exists 1 \in K \mid \forall \mathbf{f} \in M \quad 1 \bullet \mathbf{f} = \mathbf{f}$$

Beispiele:

$$1) \quad M = \mathbb{C}^n = \{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (z_1, z_2, \dots, z_n), z_i \in \mathbb{C} \}, \quad K = \mathbb{C}$$

$$\text{Addition:} \quad (z_1, z_2, \dots, z_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = (z_1 + x_1, z_2 + x_2, \dots, z_n + x_n)$$

$$\text{Multiplikation:} \quad \alpha \bullet (z_1, z_2, \dots, z_n) = (\alpha \bullet z_1, \alpha \bullet z_2, \dots, \alpha \bullet z_n)$$

$$2) \quad M = C(a, b) = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = f(x) \text{ Komplexwertige stetige Funktion} \right. \\ \left. \text{mit Definitionsbereich } [a, b] \in \mathbb{R} \right\}$$

$$K = \mathbb{C}$$

$$\text{Addition: } f(x) + g(x) = h(x), \quad \text{Multiplikation } \alpha \bullet f(x)$$

Def: Unitärer Raum Vektorraum V über $\mathbb{C}$ heißt unitär falls es mit einem

Skalarprodukt, $V \times V \rightarrow \mathbb{C} : \mathbf{f}, \mathbf{g} \in V \rightarrow \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \in \mathbb{C}$, versehen ist.

Dabei gelten folgende Axiome:

$$\forall \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{S1)} \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle \in \{\mathbb{R}^+, 0\}, \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$$\text{S2)} \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} + \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f} | \mathbf{h} \rangle$$

$$\text{S3)} \quad \langle \mathbf{f} | \alpha \mathbf{g} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$$

$$\text{S4)} \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle^* \equiv \overline{\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle} = \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle$$

Folgerung: $\langle \alpha \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$

Def: Orthogonale Vektoren. Zwei Vektoren heißen zu einander Orthogonal falls,

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = 0$$

Beispiel: 1) $M = \mathbb{C}^n = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots z_n), z_i \in \mathbb{C}\}, \quad K = \mathbb{C}$

$$\mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots, z_n) \quad \mathbf{g} = (x_1, x_2 \cdots, x_n), \quad \langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^* x_i$$

2) $M = C(a, b) = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = f(x) \text{ Komplexwertige stetige Funktion} \right. \\ \left. \text{mit Definitionsbereich } [a, b] \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \mathbb{C}$

$$\mathbf{f} = f(x), \quad \mathbf{g} = g(x), \quad \langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle = \int_a^b dx \, f^*(x) g(x)$$

$$3) \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in C(-1, 1) \quad f(x) = x, \quad g(x) = x^2 \Rightarrow \langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^1 dx \, x^3 = 0$$

$\rightarrow$ f und g sind zu einander orthogonal.

Def: Normierter Vektorraum: Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Abbildung $\|\mathbf{g}\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$N1) \quad \|\mathbf{g}\| \geq 0$$

$$N2) \quad \|\mathbf{g}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

$$N3) \quad \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|$$

$$N4) \quad \|\alpha \mathbf{g}\| = |\alpha| \|\mathbf{g}\|$$

Satz: Sei V ein Unitärer Vektorraum Dann gilt: $\|\mathbf{g}\| = \sqrt{\langle \mathbf{g} | \mathbf{g} \rangle}$

Satz: Schwarzsche Ungleichung.

$$|\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle| \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\| \quad \rightarrow \text{Unschärferelation}$$

Bem:

Unitärer Raum



Normierter Raum

Konvergenz, Vollständigkeit.

Def: Sei V ein Normierter Vektorraum. Eine folge $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{f}_n \in V \ \forall n \in \mathbb{N}$

heißt **Konvergent** falls: $\exists \mathbf{f} \in V \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\| = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\| < \varepsilon \ \forall n > N$

Def: **Cauchy Folge.** $\{\mathbf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\| < \varepsilon \ \forall n, m > N$$

Bem: Konvergente Folge $\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$ Cauchy folge.

Def: **Vollständigkeit.** Ein normierter Raum heißt Vollständig wenn in ihm jede Cauchy folge Konvergent ist.

Beisp a) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

b)

$$C^2(a,b): M = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = f(x) \in \mathbb{C}, x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, f(x) : \text{stetig}, \right. \\ \left. \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_a^b dx f^*(x) g(x), \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle} < \infty \right\}, K = \mathbb{C}$$

Ist nicht vollständig da z.B. $f_n(x) = \tanh(nx) \in C^2(-1,1) \quad \forall n$ aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \notin C^2(-1,1)$$

Satz: Jeder nicht vollständig unitärer Raum, V , kann zu einem vollständigen unitären Raum $\bar{V}$ erweitert werden so dass, V in $\bar{V}$ dicht liegt.

Bem: V liegt in $\bar{V}$ dicht: $\forall \mathbf{f} \in \bar{V} \quad \exists \mathbf{f}_n \in V \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f}$

Beisp. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$$\overline{C^2(a,b)} = L^2(a,b)$$

Def: Ein vollständig unitärer Raum heißt **Hilbertraum**.

Beisp. $\rightarrow L^2(a, b)$

$$\rightarrow M = \mathbb{C}^n = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots z_n), z_i \in \mathbb{C}\}, \quad K = \mathbb{C}$$

$$\mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots, z_n) \quad \mathbf{g} = (x_1, x_2 \cdots, x_n), \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^n z_i^* x_i$$

I a) Volständiges Orthonormalsystem (VONS).

Def: Sei H ein Hilbertraum. Eine Menge $\{\mathbf{a}_i\} \subset H$ heißt orthonormal falls

$$\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Def: VONS (Basis) Sei H ein Hilbertraum. Ein orthonormalsystem $M = \{\mathbf{a}_i\} \subset H$ heißt vollständig wenn es kein $\mathbf{f} \in H \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt so dass, $\langle \mathbf{f} | \mathbf{a}_i \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{a}_i \in M$

Folgerungen: Sei $\{\mathbf{a}_i\}$ VONS von H

$$\rightarrow \quad \forall \mathbf{f} \in H \quad \mathbf{f} = \sum_i \mathbf{a}_i \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle$$

$$\rightarrow \quad \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in H \quad \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{g} | \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{g} \rangle^* \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle$$

$$\rightarrow \quad \forall \mathbf{f} \in H \quad \|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle^* \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle = \sum_i |\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle|^2$$

Beisp.

$$\text{a) } \mathbb{C}^2 : \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } L^2(a,b): \quad a_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi}{L} k x}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{i \frac{2\pi}{L} k x} \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{f} \rangle, \quad \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx e^{-i \frac{2\pi}{L} k x} f(x)$$

Fourier Transformation. (Vollständigkeit beweis, siehe später)

I b) Lineares Funktional, dualer Raum, Dirac Notation.

Def. Sei H ein Hilbertraum. Eine lineare Abbildung $L: H \rightarrow \mathbb{C}$ heißt lineares Funktional

Linear: $\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad L(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha L(\mathbf{f}) + \beta L(\mathbf{g})$

Def. Norm von L $\|L\| = \sup_{\mathbf{f}, \|\mathbf{f}\|=1} |L(\mathbf{f})|$

Def. L heißt stetig falls $\forall \{\mathbf{f}_n\} \in H$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f} \in H$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathbf{f}_n) = L(\mathbf{f})$

Satz: L stetig $\Leftrightarrow \|L\| < \infty$

Satz von Riesz Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem linearen stetigen Funktional $L \in H^*$ existiert genau

$\mathbf{g}_L \in H$ so dass: $L(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g}_L | \mathbf{f} \rangle \quad \forall \mathbf{f} \in H$

Def: Dualer Raum. Es sei H ein Hilbert Raum. Die Menge, $\tilde{H}$, der linearen stetigen Funktionale, $L: H \rightarrow \mathbb{C}$ heißt der zu H duale Raum.

Bem:

$\tilde{H} = \{L: H \rightarrow \mathbb{C}, L \text{ stetig}\}$ isomorph $\{\mathbf{g}_L \in H, L(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g}_L | \mathbf{f} \rangle \text{ stetig}\} = H$
d.h. eine Abbildung zwischen $\tilde{H}$ und H

Dirac Notation.

Sei: $L_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle$

$L_{\mathbf{g}} \equiv \langle \mathbf{g} | \in \tilde{H}$ Bra

$\mathbf{f} \equiv | \mathbf{f} \rangle \in H$ Ket

Eigenschaften:

a) $\langle \alpha \mathbf{g} | = \alpha^* \langle \mathbf{g} |$

b) Sei $\{ | \mathbf{a}_n \rangle \}$ VONS $\rightarrow \sum_n | \mathbf{a}_n \rangle \langle \mathbf{a}_n | = \hat{1}$

Bem: Eins Operator: $\hat{1} : H \rightarrow H \mid \forall |\mathbf{f}\rangle \in H \quad \hat{1} |\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{f}\rangle$

In der alten Notation

$$\sum_n \mathbf{a}_n L_{\mathbf{a}_n}(\mathbf{f}) = \sum_n \mathbf{a}_n \langle \mathbf{a}_n | \mathbf{f} \rangle = \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{f} \in H \Rightarrow \sum_n \mathbf{a}_n L_{\mathbf{a}_n} = \hat{1}$$

c) $\forall |\mathbf{f}\rangle \in H \quad |\mathbf{f}\rangle = \hat{1} |\mathbf{f}\rangle = \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle \langle \mathbf{a}_n | \mathbf{f} \rangle$

$$\forall |\mathbf{f}\rangle \in H \quad |\mathbf{f}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{f} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{f} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_\infty | \mathbf{f} \rangle \end{pmatrix} \quad |\mathbf{f}\rangle \text{ kann man immer als Vektor darstellen}$$

c) Lineare Operatoren im Hilbertraum

Def: $\hat{A} : H \rightarrow H$, $\hat{A}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{g}\rangle$, nennt man Operator in H

Beisp: a) $H = L^2(a, b)$, $\hat{P} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$

b) Projektions-Operator $\hat{P}_{\mathbf{f}} = |\mathbf{f}\rangle\langle\mathbf{f}|$

c) Eins-Operator Sei $\{|\mathbf{a}_n\rangle\}$ VONS $\rightarrow \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle\langle\mathbf{a}_n| = \hat{1}$

Def: Lineare Operatoren. $\hat{A} : H \rightarrow H$ heißt linear falls

$$\forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \hat{A}(\alpha|\mathbf{f}\rangle + \beta|\mathbf{g}\rangle) = \alpha\hat{A}|\mathbf{f}\rangle + \beta\hat{A}|\mathbf{g}\rangle$$

Beisp: $H = L^2(a, b)$, $\hat{P} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ ist linear.

Multiplikation von Operatoren: $\hat{A}\hat{B}|\mathbf{f}\rangle = \hat{A}[\hat{B}|\mathbf{f}\rangle]$

Es gilt: $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$

Def: Kommutator von Operatoren. $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Beisp. $H = L^2(a, b), \quad \hat{P} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}, \quad \hat{X} = x, \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i\hat{1}$

Matrix Darstellung von Operatoren.

Sei $\{|\mathbf{a}_n\rangle\}$ VONS $\rightarrow \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle\langle\mathbf{a}_n| = \hat{1}$

$\hat{A}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow \langle\mathbf{a}_k|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle = \langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow \langle\mathbf{a}_k|\hat{A}\hat{1}|\mathbf{f}\rangle = \langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow$

$\sum_n \underbrace{\langle\mathbf{a}_k|\hat{A}|\mathbf{a}_n\rangle}_{A_{k,n}} \underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\mathbf{f}\rangle}_{f_n} = \underbrace{\langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle}_{g_k}$

Def: Norm eines Linearen Operator.

$$\|\hat{A}\| = \sup_{|\mathbf{f}\rangle \in H, \|\mathbf{f}\|=1} \|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\|$$

Axiome der Norm sind erfüllt !

$$N1: \|\hat{A}\| > 0$$

$$N2: \|\hat{A}\| = 0 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{0}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{A}\| = 0 &\Rightarrow \forall |\mathbf{f}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle, \|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\| = 0 \Rightarrow \hat{A}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{0}\rangle. \\ \hat{A} \text{ ist linear} &\Rightarrow \hat{A}|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \\ \Rightarrow \forall |\mathbf{f}\rangle \in H &\quad \hat{A}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \end{aligned}$$

$$N3: \|\hat{A} + \hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| + \|\hat{B}\|$$

$$\begin{aligned} \|\hat{A} + \hat{B}\| &= \sup_{|\mathbf{f}\rangle, \|\mathbf{f}\|=1} \|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle + \hat{B}|\mathbf{f}\rangle\| \leq \sup_{|\mathbf{f}\rangle, \|\mathbf{f}\|=1} [\|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\| + \|\hat{B}|\mathbf{f}\rangle\|] \leq \\ &\sup_{|\mathbf{f}\rangle, \|\mathbf{f}\|=1} \|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\| + \sup_{|\mathbf{f}\rangle, \|\mathbf{f}\|=1} \|\hat{B}|\mathbf{f}\rangle\| = \|\hat{A}\| + \|\hat{B}\| \end{aligned}$$

Def: $\hat{A}$ heißt beschränkt $\rightarrow \|\hat{A}\| < \infty$

Biesp: a) $\hat{P}_f = |f\rangle\langle f|$

$$\begin{aligned} \|\hat{P}_f\| &= \sup_{|g\rangle \in H, \|g\|=1} \||f\rangle\langle f|g\rangle\| = \sup_{|g\rangle \in H, \|g\|=1} |\langle f|g\rangle| \||f\rangle\| \leq \\ &\sup_{|g\rangle \in H, \|g\|=1} \||f\rangle\| \||g\rangle\| \||f\rangle\| = \||f\rangle\|^2 \end{aligned}$$

Schwarz'sche
Ungleichung.



b) $L^2(\mathbb{R})$: $\hat{X} = x$ ist nicht beschränkt da: $f_n(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-(x-n)^2/4}$

$$\|f_n(x)\|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-n)^2/2} = 1 \quad \text{aber} \quad \|\hat{X}f_n(x)\|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-(x-n)^2/2} \propto n^2$$

Bem: $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{1} \Leftrightarrow \hat{A} \text{ oder } \hat{B} \text{ ist nicht beschränkt}$

Inverse, Hermitesche, und Unitäre Operatoren.

Def: Sei $\hat{A}$ Operator in H . Der zu $\hat{A}$ inverse Operator, $\hat{A}^{-1}$ ist durch

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} |\mathbf{f}\rangle = \hat{A}^{-1} \hat{A} |\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{f}\rangle \quad \forall \mathbf{f} \in H \quad \text{definiert.}$$

Es gilt:
$$(\hat{A} \hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1}$$

Adjungiert Operator.

Def: Sei $\hat{A}$ Operator in H . Der zu $\hat{A}$ adjungiert Operator, $\hat{A}^\dagger$ ist durch

$$\langle \mathbf{g} | \hat{A} \mathbf{f} \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \quad \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in H \quad \text{definiert.}$$

Äquivalente Definition
$$\left(\langle \mathbf{g} | \hat{A} | \mathbf{f} \rangle \right)^* = \langle \mathbf{f} | \hat{A}^\dagger | \mathbf{g} \rangle \quad \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in H$$

Folgerungen

a) $\hat{A}^\dagger$ ist linear.

b) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

c) $(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})^\dagger = \alpha^*\hat{B}^\dagger + \beta^*\hat{A}^\dagger, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

d) Matrix Darstellung von $\hat{A}^\dagger$ Sei $\{|\mathbf{a}_n\rangle\}$ VONS $\rightarrow \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle\langle\mathbf{a}_n| = \hat{1}$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{1}\hat{A}^\dagger\hat{1} = \sum_{n,m} |\mathbf{a}_n\rangle \underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\hat{A}^\dagger|\mathbf{a}_m\rangle}_{\equiv A_{n,m}^\dagger} \langle\mathbf{a}_m| \qquad \hat{A} = \hat{1}\hat{A}\hat{1} = \sum_{n,m} |\mathbf{a}_n\rangle \underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\hat{A}|\mathbf{a}_m\rangle}_{\equiv A_{n,m}} \langle\mathbf{a}_m|$$

$$A_{n,m}^\dagger = \langle\mathbf{a}_n|\hat{A}^\dagger|\mathbf{a}_m\rangle = \left(\langle\mathbf{a}_m|\hat{A}|\mathbf{a}_n\rangle\right)^* = A_{m,n}^*$$

$$A^\dagger = A^{*T}$$

Beisp: $L^2(\mathbb{R}): \quad \hat{P} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f} | \hat{P} | \mathbf{g} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f^*(x) \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g(x) = \underbrace{f^*(x) g(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dx} f^*(x) \right) g(x) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g^*(x) \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx} f(x) \right) \right]^* = \left(\langle \mathbf{g} | \hat{P} | \mathbf{f} \rangle \right)^* \end{aligned}$$

$\rightarrow$ In $L^2(\mathbb{R})$ ist $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$

Def: $\hat{A}$ heißt selbstadjungiert oder Hermitesch falls $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

Eigenvektoren, Eigenwerte.

Def. Sei $\hat{A}$ ein Lin. Operator in H . Ein Vektor $|\mathbf{a}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ heißt Eigenvektor mit eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ falls. $\hat{A} |\mathbf{a}\rangle = \alpha |\mathbf{a}\rangle$

Def: Die Menge alle Eigenwerte heißt Spektrum von $\hat{A}$

Satz: Sei $\hat{A}$ ein Lin. Operator in H mit $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Dann gilt für

$$\hat{A} |\mathbf{a}_i\rangle = \alpha_i |\mathbf{a}_i\rangle, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Bew:

$$0 = \langle \mathbf{a}_j | \hat{A} |\mathbf{a}_i\rangle - \left(\langle \mathbf{a}_i | \hat{A}^\dagger |\mathbf{a}_j\rangle \right)^* = \langle \mathbf{a}_j | \hat{A} |\mathbf{a}_i\rangle - \left(\langle \mathbf{a}_i | \hat{A} |\mathbf{a}_j\rangle \right)^* = (\alpha_i - \alpha_j^*) \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle$$

$$\text{a) } i = j \Rightarrow 0 = (\alpha_i - \alpha_i^*) \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \rangle \Rightarrow \alpha_i = \alpha_i^* \Rightarrow \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } i \neq j \Rightarrow 0 = (\alpha_i - \alpha_j^*) \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle = 0 \quad \text{da} \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Bem. Für $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, $\hat{A} |\mathbf{a}_i\rangle = \alpha_i |\mathbf{a}_i\rangle$ und $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{i,j}$ dann ist $\{\mathbf{a}_j\}$ VONS

Konsequenz (Definitions-bereich von $\hat{A}$ sei H).

$$\hat{A} = \hat{A} \hat{1} = \hat{A} \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle \langle \mathbf{a}_n| = \sum_n \alpha_n |\mathbf{a}_n\rangle \langle \mathbf{a}_n|$$

Def: Unitäre Operatoren. Ein Lin. Operator, $\hat{U}$, in H heißt Unitär falls.

$$\langle \hat{U} \mathbf{g} | \hat{U} \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \quad \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in H$$

Folgerung. $\langle \hat{U}^\dagger \hat{U} \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle \quad \forall |\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle \in H$ $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}$

Funktion von Operatoren ist durch die Taylor Entwicklung definiert.

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \Big|_{x=0} \frac{x^n}{n!}$ dann ist $f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) \Big|_{x=0} \frac{\hat{A}^n}{n!}$

Beispiele

a) Sei $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\hat{U} = e^{i\alpha\hat{A}}$, unitär da $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}$

$$\text{Es gilt für } A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\alpha A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Baker-Hausdorf.

Sei $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ dann gilt: $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2}$

Bew:

Sei $\hat{U}(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}}$, $t \in \mathbb{R}$ so dass:

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t) = e^{t\hat{A}} \hat{A} e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} \hat{B} = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t\hat{B}} \hat{A} e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} \hat{B} = \hat{U}(t) e^{-t\hat{B}} \hat{A} e^{t\hat{B}} + \hat{U}(t) \hat{B}$$

$$\text{Aber: } \frac{d}{dt} e^{-t\hat{B}} \hat{A} e^{t\hat{B}} = e^{-t\hat{B}} [\hat{A}, \hat{B}] e^{t\hat{B}} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{da} \quad [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$$

$$e^{-t\hat{B}} \hat{A} e^{t\hat{B}} = [\hat{A}, \hat{B}] t + \hat{A}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{U}(t) \left([\hat{A}, \hat{B}] t + \hat{A} + \hat{B} \right) \Rightarrow \hat{U}(t) = e^{[\hat{A}, \hat{B}] t^2 / 2 + (\hat{A} + \hat{B}) t}$$

Für $t=1$ ist der Satz bewiesen.

Tensorprodukt Zwei Hilberträume.

Sei $\{|\mathbf{a}_i\rangle\}_{i:1\cdots M}$ VONS von H_1 und $\{|\mathbf{b}_j\rangle\}_{j:1\cdots N}$ VONS von H_2

Dann ist $\{|\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle\}_{i:1\cdots M, j:1\cdots N}$ VONS von $H_1 \otimes H_2$ so dass:

$$\forall |\mathbf{f}\rangle \in H_1 \otimes H_2, \quad |\mathbf{f}\rangle = \sum_{i:1\cdots M, j:1\cdots N} \alpha_{i,j} |\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle$$

Skalarprodukt. $|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i:1\cdots M, j:1\cdots N} \alpha_{i,j} |\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle$ und $|\mathbf{g}\rangle = \sum_{i:1\cdots M, j:1\cdots N} \beta_{i,j} |\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle &= \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}^* \langle \mathbf{a}_i | \otimes \langle \mathbf{b}_j | \right) \left(\sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \beta_{k,l} |\mathbf{a}_k\rangle \otimes |\mathbf{b}_l\rangle \right) = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \alpha_{i,j}^* \beta_{k,l} \left((\langle \mathbf{a}_i | \otimes \langle \mathbf{b}_j |) (|\mathbf{a}_k\rangle \otimes |\mathbf{b}_l\rangle) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \alpha_{i,j}^* \beta_{k,l} \underbrace{\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_k \rangle}_{\text{Skalarprodukt in } H_1} \underbrace{\langle \mathbf{b}_j | \mathbf{b}_l \rangle}_{\text{Skalarprodukt in } H_2} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j}^* \beta_{i,j} \end{aligned}$$

Skalarprodukt in H_1

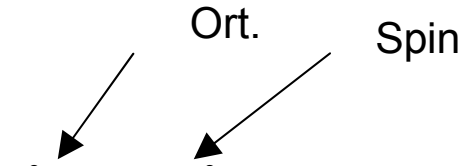
Skalarprodukt in H_2

Es gilt: $\dim(H_1 \otimes H_2) = \dim(H_1) \dim(H_2)$

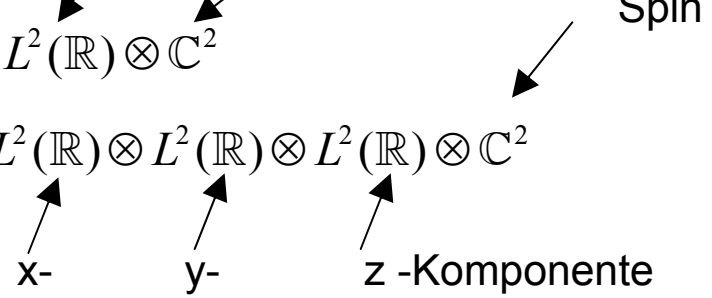
Beisp: a) Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen in ein Dimension.

b) Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen in drei Dimensionen

$$H = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$$



$$H = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$$



c) Zwei Spin $\frac{1}{2}$: $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

Basis von $\mathbb{C}^2$: $\{ |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \}$

Basis von $H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$: $\{ |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \}$

Lin. Operatoren auf Tensorprodukt Hilberträume

Sei $H = H_1 \otimes H_2$ mit $\{|a_i\rangle\}$ VONS von H_1 und $\{|b_j\rangle\}$ VONS von H_2

Ein Lin. Operator $\hat{A} : H \rightarrow H$ ist durch $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ mit $\hat{A}_1 : H_1 \rightarrow H_1$
und $\hat{A}_2 : H_2 \rightarrow H_2$ gegeben.

Es gilt: $\forall |f\rangle \in H \quad |f\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$, $\hat{A} |f\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \hat{A}_1 |a_i\rangle \otimes \hat{A}_2 |b_j\rangle$

Beisp: a)
$$\hat{1} = \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2 = \left(\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| \right) \otimes \left(\sum_j |b_j\rangle \langle b_j| \right) = \sum_i \sum_j |a_i\rangle \langle a_i| \otimes |b_j\rangle \langle b_j|$$
$$= \sum_i \sum_j (|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle) (\langle a_i| \otimes \langle b_j|)$$

Letzte schritt folgt aus der Tatsache dass, $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$ ein Basis von $H_1 \otimes H_2$ ist.

b) $H = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$

$$\hat{A} = \hat{P} \otimes \hat{S}, \quad \hat{P} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}, \quad \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \hat{S} | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \hat{S} | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \hat{S} | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \hat{S} | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Distributionen, Dirac δ -funktion.

Def. Schwartz'sche Raum.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi(x) \mid \varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \max_x |x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} \varphi(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}$$

Beisp. $e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aber $\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Bem. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$. d.h. $\exists$ VONS von $L^2(\mathbb{R})$, $\{\mathbf{a}_i\}$, $\mathbf{a}_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Def: Die Linearen, stetigen Funktionale über $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nennt man Distributionen. Die Menge der Distributionen bilden der zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dualer Raum: $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$

$$L \in \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}: L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad L(\varphi) \in \mathbb{C}$$

Bem:

$$L(\varphi) = L\left(\sum_i \mathbf{a}_i \langle \mathbf{a}_i | \varphi \rangle\right) = \sum_i L(\mathbf{a}_i) \langle \mathbf{a}_i | \varphi \rangle = \left\langle \underbrace{\sum_i L(\mathbf{a}_i)^* \mathbf{a}_i}_{=\mathbf{g}^*} \middle| \varphi \right\rangle = \langle \mathbf{g}^* | \varphi \rangle =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \mathbf{g}(x) \varphi(x) \equiv L_g(\varphi)$$

Beisp: Dirac δ -Funktion.

$$L_{\delta}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x) \varphi(x) \equiv \varphi(0)$$

Heaviside Funktion.

$$L_{\Theta}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Theta(x) \varphi(x) \equiv \int_0^{\infty} dx \, \varphi(x)$$

δ -Folgen. Satz: Sei $g_1(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, g_1(x) = 1$

Sei $g_n(x) = n g_1(nx)$

Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \delta(x)$

$$\text{d.h.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x) g_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Beisp:

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx} = n g_1(nx), \quad \text{mit } g_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\text{Da } \int_{-\infty}^{\infty} dx g_1(x) = 1 \quad \text{gilt}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x)$$

Konsequenz: Fourier Transform.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{f}(k) \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x)$$

Bew:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-y)} f(y)}_{\delta(x-y)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) f(y) = f(x) \end{aligned}$$

Die Fourier Transformation ist eine Unitäre Transformation in $L^2(\mathbb{R})$

Bew:

$$\text{Sei: } (\hat{U}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \tilde{f}(k)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}f | \hat{U}g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} g(y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} f^*(x) g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) f^*(x) g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) g(x) = \langle f | g \rangle \end{aligned}$$

Bemerkung. Jede Funktion kann man als Distribution auffassen.

d.h. $f(x)$ ist durch Kenntnis von $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) f(x) \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt

Bew: Sei $f_1(x) \neq f(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) f_1(x) \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) [f(x) - f_1(x)] = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{(ikx)^n}{n!} \varphi(x) [f(x) - f_1(x)] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \overbrace{\varphi(x) [f(x) - f_1(x)]}^{= g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(k) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{g}(k) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) [f(x) - f_1(x)] = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f(x) = f_1(x) \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Ableitung von Distributionen.

Sei $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, f kann man als Distribution auffassen:

$L_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \varphi(x)$, f' kann man auch als Distribution auffassen

$$L_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) \varphi(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) = - L_f \left(\frac{d}{dx} \varphi \right)$$

Def:

$$L_{\frac{d^n}{dx^n} f}(\varphi) = (-1)^n L_f \left(\frac{d^n}{dx^n} \varphi \right)$$

Eigenschaften von Dirac δ -Funktion

- ▷ $x\delta(x) = 0$
- ▷ $\delta(x) = \delta(-x)$
- ▷ $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x)$
- ▷ $\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)$, $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$