Mathe für QM Fokus. Zusammenfassung.

I) Der Hilbertraum. Vollständiger, unitärer Raum.

a) Volständiges Orthonormalsystem (VONS).
b) Lineares Funktional, dualer Raum, Dirac Notation.
c) Lineare Operatoren im Hilbertraum.
d) Direkte Summe und Tensor Produkt zwei Hilberträume.

II) Distributionen

III) Fourier Transformationen. Faltung und bedeutung.

IV) Klassische Mechanik. Lagrange-Hamilton.

I. Definitionen.

Def: Körper K. Menge M mit zwei Operationen $+: \; K \times K \rightarrow K$ und $\bullet: \; K \times K \rightarrow K$

$\forall x, y, z \in K$ gilt

K1)	$x + y = y + x, \qquad x \bullet y = y \bullet x$	Kommutativität
K2)	$(x+y)+z = x+(y+z), \quad (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$	Assoziativität
K3)	$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$	Distributivität
K4)	$\exists\, 0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1 \mid \forall x \in K \quad x + 0 = x, \quad x \bullet 1 = x$	
K5)	$\forall x \in K \;\; \exists\, y \in K \mid \; x + y = 0, \; y = -x$	
	$\forall x \in K \;\; \exists\, y \in K \mid \; x \bullet y = 1, \quad y = 1/x$	

Beisp. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Def: Vektorraum V: Menge M von Vektoren und Körper K mit folgenden Eigenschaften.

$$\forall\ \mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h} \in M \quad \alpha,\beta \in K \quad \text{gilt}$$

Addition: $+\ \ M \times M \to M$

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}=\mathbf{g}+\mathbf{f}$$

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})+\mathbf{h}=\mathbf{g}+(\mathbf{f}+\mathbf{h})$$

$$\exists\ \mathbf{0}\in M \mid \ \forall \mathbf{f}\in M \quad \mathbf{f}+\mathbf{0}=\mathbf{f}$$

$$\forall \mathbf{f}\in M\ ,\ \exists\ \mathbf{h}\in M \mid \mathbf{f}+\mathbf{h}=\mathbf{0}$$

Multiplikation: $\bullet\ \ K \times M \to M$

$$\alpha\bullet(\mathbf{f}+\mathbf{h})=\alpha\bullet\mathbf{f}+\alpha\bullet\mathbf{h}$$

$$(\alpha+\beta)\bullet\mathbf{f}=\alpha\bullet\mathbf{f}+\beta\bullet\mathbf{f}$$

$$(\alpha\bullet\beta)\bullet\mathbf{f} = \alpha\bullet(\beta\bullet\mathbf{f})$$

$$\exists\ 1\in K \mid \ \forall \mathbf{f}\in M \quad 1\bullet\mathbf{f}=\mathbf{f}$$

Beispiele:

1) $M = \mathbb{C}^n = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f}=(z_1,z_2\cdots z_n),\ z_i\in\mathbb{C}\}, \quad K=\mathbb{C}$

Addition: $(z_1,z_2\cdots,z_n) + (x_1,x_2\cdots,x_n)=(z_1+x_1,z_2+x_2\cdots,z_n+x_n)$

Multiplikation: $\alpha\bullet(z_1,z_2\cdots z_n) = (\alpha\bullet z_1,\alpha\bullet z_2\cdots,\alpha\bullet z_n)$

2) $M=C(a,b)=\left\{\begin{array}{l}\mathbf{f}\ |\mathbf{f} = f(x) \ \ \text{Komplexwertige stetige Funktion} \\ \qquad\qquad\qquad \text{mit Definitionsbereich } [a,b]\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$

$K=\mathbb{C}$

Addition: f(x) + g(x) = h(x), Multiplication $\alpha\bullet f(x)$

Def: Unitärer Raum Vektorraum V über $\mathbb{C}$ heißt unitär falls es mit einem

Skalarprodukt, $V \times V \to \mathbb{C}: \ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in V \ \to \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \in \mathbb{C}$, versehen ist.

Dabei gelten folgende Axiome:

$\forall \ \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in V, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

S1) $\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle \in \{ \mathbb{R}^+, 0 \}, \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{0}$

S2) $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} + \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f} | \mathbf{h} \rangle$

S3) $\langle \mathbf{f} | \alpha \mathbf{g} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$

S4) $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle^* \equiv \overline{\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle} = \langle \mathbf{g} | \mathbf{h} \rangle$

Folgerung: $\langle \alpha \mathbf{f} | \ \mathbf{g} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$

Def: Orthogonale Vektoren. Zwei Vektoren heißen zu einander Orthogonal falls,

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = 0$$

Def: Normierter Vektorraum: Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Abbildung $\|\mathbf{g}\| : \ V \to \mathbb{R}$ mit:

$$\forall\, \mathbf{f}, \mathbf{g} \in V \ , \ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$N1) \quad \|\mathbf{g}\| \geq 0$$

$$N2) \quad \|\mathbf{g}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

$$N3) \quad \|\mathbf{f} + \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|$$

$$N4) \quad \|\alpha \mathbf{g}\| = |\alpha| \|\mathbf{g}\|$$

Satz: Sei V ein Unitärer Vektorraum Dann gilt: $\|\mathbf{g}\| = \sqrt{\langle \mathbf{g} | \mathbf{g} \rangle}$

Satz: Schwarzsche Ungleichung.

$$\left| \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \right| \leq \|\mathbf{f}\| \, \|\mathbf{g}\|$$ → Unschärferelation

Bem:

Unitärer Raum $\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \not\longleftarrow \end{array}$ Normierter Raum

Beispiel: 1) $M = \mathbb{C}^n = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots z_n),\ z_i \in \mathbb{C} \right\}, \quad K = \mathbb{C}$

$$\mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots, z_n) \qquad \mathbf{g} = (x_1, x_2 \cdots, x_n)\ , \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i^* x_i$$

2) $M = C(a,b) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = f(x) \quad \text{Komplexwertige stetige Funktion} \\ \qquad\qquad \text{mit Definitionsbereich } [a,b] \in \mathbb{R} \end{array} \right\},\ K = \mathbb{C}$

$$\mathbf{f} = f(x),\ \mathbf{g} = g(x), \qquad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_a^b dx\ f^*(x)\, g(x)$$

3) $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C(-1,1) \qquad f(x) = x,\ g(x) = x^2 \Rightarrow \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} dx\ x^3 = 0$

→ f und g sind zu einander orthogonal.

Konvergenz, Vollständigkeit.

Def: Sei V ein Normierter Vektorraum. Eine folge $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{f}_n \in V \ \forall n \in \mathbb{N}$

heißt Konvergent falls: $\exists \ \mathbf{f} \in V \mid \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\| = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} \mid \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}\| < \varepsilon \ \ \forall n > N$

Def: Cauchy Folge. $\{\mathbf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} \mid \|\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_m\| < \varepsilon \ \ \forall n, m > N$$

Bem: Konvergente Folge $\begin{array}{c}\rightarrow\\ \not\leftarrow\end{array}$ Cauchy folge.

Def: Vollständigkeit. Ein normierter Raum heißt Vollständig wenn in ihm jede Cauchy folge Konvergent ist.

Beisp a) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

b) $C^2(a,b):\ M = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f} \mid \mathbf{f} = f(x) \in \mathbb{C},\ \ x \in [a,b] \subset \mathbb{R},\ f(x): \text{stetig}, \\ \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_a^b dx\ f^*(x)\, g(x)\ ,\ \ \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle} < \infty \end{array} \right\},\ K = \mathbb{C}$

Ist nicht vollständig da z.B. $f_n(x) = \tanh(nx)\ \in C^2(-1,1)\ \ \forall n$ aber

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } & x > 0 \\ -1 \text{ für } & x < 0 \end{cases} \ \notin\ C^2(-1,1)$$

Satz: Jeder nicht vollständig unitärer Raum, V, kann zu einem vollständigen unitären Raum $\overline{V}$ erweitert werden so dass, V in $\overline{V}$ dicht liegt.

Bem: V liegt in $\overline{V}$ dicht: $\forall \mathbf{f} \in \overline{V}\ \ \exists \mathbf{f}_n \in V\ \mid\ \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f}$

Beisp.

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$\overline{C^2(a,b)} = L^2(a,b)$$

Def: Ein vollständig unitärer Raum heißt **Hilbertraum.**

Beisp. → $L^2(a,b)$

→ $M = \mathbb{C}^n = \{\mathbf{f} \mid \mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots z_n),\ z_i \in \mathbb{C}\}, \quad K = \mathbb{C}$

$\mathbf{f} = (z_1, z_2 \cdots, z_n) \quad \mathbf{g} = (x_1, x_2 \cdots, x_n)\ , \quad \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i^* x_i$

I a) Volständiges Orthonormalsystem (VONS).

Def: Sei H ein Hilbertraum. Eine Menge $\{\mathbf{a}_i\} \subset H$ heißt orthonormal falls

$$\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls i=j} \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Def: VONS (Basis) Sei H ein Hilbertraum. Ein orthonormalsystem $M = \{\mathbf{a}_i\} \subset H$ heißt vollständig wenn es kein $\mathbf{f} \in H \setminus \{\mathbf{0}\}$ gibt so dass, $\langle \mathbf{f} | \mathbf{a}_i \rangle = 0 \quad \forall \ \mathbf{a}_i \in M$

<u>Folgerungen:</u> Sei $\{\mathbf{a}_i\}$ VONS von H

$$\rightarrow \quad \forall \ \mathbf{f} \in H \qquad \mathbf{f} = \sum_i \mathbf{a}_i \ \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle$$

$$\rightarrow \quad \forall \ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in H \qquad \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{g} | \mathbf{a}_i \rangle \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{g} \rangle^* \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle$$

$$\rightarrow \quad \forall \ \mathbf{f} \in H \qquad \|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle^* \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle = \sum_i |\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{f} \rangle|^2$$

Beisp.

a) $\mathbb{C}^2: \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $L^2(a,b): \quad a_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}kx}, \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{i\frac{2\pi}{L}kx} \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{f} \rangle, \qquad \langle \mathbf{a}_k | \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_a^b dx\, e^{-i\frac{2\pi}{L}kx} f(x)$$

Fourier Transformation. (Vollständigkeit beweis, siehe später)

I b) Lineares Funktional, dualer Raum, Dirac Notation.

Def. Sei H ein Hilbertraum. Ein lineare Abbildung $L: \ H \to \mathbb{C}$ heißt lineares funktional.

Linear: $\forall \ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in H, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad L(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha L(\mathbf{f}) + \beta L(\mathbf{g})$

Def. Norm von L $\quad \| L \| = \sup_{\mathbf{f}, \|\mathbf{f}\|=1} |L(\mathbf{f})|$

Def. L heißt stetig falls $\quad \forall \ \{\mathbf{f}_n\} \in H$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f} \in H$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} L(\mathbf{f}_n) = L(\mathbf{f})$

Satz: L stetig $\Leftrightarrow \| L \| < \infty$

Satz von Riesz Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem linearen stetigen Funktional L $\exists$ genau

$\mathbf{g}_L \in H$ so dass: $\quad L(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g}_L | \mathbf{f} \rangle \quad \forall \ \mathbf{f} \in H$

Def: Dualer Raum. Es sei H ein Hilbert Raum. Die menge, $\tilde{H}$,der lineare stetigen Funktionale, $L:\ H \to \mathbb{C}$ heißt der zu H duale Raum.

Bem:

$$\tilde{H} = \left\{ L : H \to \mathbb{C},\ L \text{ stetig} \right\} \quad \text{isopmorph} \quad \left\{ \mathbf{g}_L \in H\,,\ \ L(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g}_L | \mathbf{f} \rangle \text{ stetig} \right\} \quad = H$$

d.h. eins zu eins Abbildung zwischen $\tilde{H}$ und H

<u>Dirac Notation.</u> Sei: $L_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{g} | \mathbf{f} \rangle$

$L_{\mathbf{g}} \equiv \langle \mathbf{g} | \ \in \ \tilde{H}$ Bra

$\mathbf{f} \equiv | \mathbf{f} \rangle \in \ H$ Ket

<u>Eigenschaften:</u>

a) $\langle \alpha \mathbf{g} | = \alpha^* \langle \mathbf{g} |$

b) Sei $\left\{ | \mathbf{a}_n \rangle \right\}$ $VONS$ $\to$ $\sum\limits_n | \mathbf{a}_n \rangle \langle \mathbf{a}_n | = \hat{1}$

Bem: Eins Operator: $\hat{1} : H \to H \mid \forall \left|\mathbf{f}\right\rangle \in H \quad \hat{1}\left|\mathbf{f}\right\rangle = \left|\mathbf{f}\right\rangle$

In der alten Notation

$$\sum_n \mathbf{a}_n L_{\mathbf{a}_n}(\mathbf{f}) = \sum_n \mathbf{a}_n \left\langle \mathbf{a}_n \middle| \mathbf{f} \right\rangle = \mathbf{f} \qquad \forall \mathbf{f} \in H \Rightarrow \sum_n \mathbf{a}_n L_{\mathbf{a}_n} = \hat{1}$$

c) $\forall \left|\mathbf{f}\right\rangle \in H \quad \left|\mathbf{f}\right\rangle = \hat{1}\left|\mathbf{f}\right\rangle = \sum_n \left|\mathbf{a}_n\right\rangle \left\langle \mathbf{a}_n \middle| \mathbf{f} \right\rangle$

$$\forall \left|\mathbf{f}\right\rangle \in H \quad \left|\mathbf{f}\right\rangle \to \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{a}_1 \middle| \mathbf{f} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{a}_2 \middle| \mathbf{f} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \mathbf{a}_\infty \middle| \mathbf{f} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$\left|\mathbf{f}\right\rangle$ kann man immer als Vektor darstellen

c) Lineare Operatoren im Hilbertraum

Def: $\hat{A}\,:\;H \rightarrow H\,,\qquad \hat{A}\left|\mathbf{f}\right\rangle = \left|\mathbf{g}\right\rangle,$ nennt man Operator in H

Beisp: a) $H = L^2(a,b),\qquad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$

b) Projektions-Operator $\hat{P}_{\mathbf{f}} = \left|\mathbf{f}\right\rangle\left\langle\mathbf{f}\right|$

c) Eins-Operator $\text{Sei }\left\{\left|\mathbf{a}_n\right\rangle\right\}\ VONS\ \rightarrow\ \sum_n \left|\mathbf{a}_n\right\rangle\left\langle\mathbf{a}_n\right| = \hat{1}$

Def: Lineare Operatoren. $\hat{A}\,:\;H \rightarrow H$ heißt linear falls

$$\forall\left|\mathbf{f}\right\rangle,\left|\mathbf{g}\right\rangle \in H,\ \ \alpha,\beta \in \mathbb{C},\qquad \hat{A}\left(\alpha\left|\mathbf{f}\right\rangle + \beta\left|\mathbf{g}\right\rangle\right) = \alpha\hat{A}\left|\mathbf{f}\right\rangle + \beta\hat{A}\left|\mathbf{g}\right\rangle$$

Beisp: $H = L^2(a,b),\qquad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ ist linear.

Multiplikation von Operatoren: $\hat{A}\hat{B}|\mathbf{f}\rangle = \hat{A}\left[\hat{B}|\mathbf{f}\rangle\right]$

Es gilt: $\left(\hat{A}\hat{B}\right)\hat{C} = \hat{A}\left(\hat{B}\hat{C}\right)$

Def: Kommutator von Operatoren. $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$

Beisp. $H = L^2(a,b),\quad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx},\quad \hat{X} = x,\quad \left[\hat{X},\hat{P}\right] = i\hat{1}$

Matrix Darstellung von Operatoren.

Sei $\{|\mathbf{a}_n\rangle\}$ $VONS$ $\rightarrow \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle\langle\mathbf{a}_n| = \hat{1}$

$$\hat{\mathrm{A}}|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow \langle\mathbf{a}_k|\hat{\mathrm{A}}|\mathbf{f}\rangle = \langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow \langle\mathbf{a}_k|\hat{\mathrm{A}}\hat{1}|\mathbf{f}\rangle = \langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle \Leftrightarrow$$

$$\sum_n \underbrace{\langle\mathbf{a}_k|\hat{\mathrm{A}}|\mathbf{a}_n\rangle}_{A_{k,n}}\underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\mathbf{f}\rangle}_{f_n} = \underbrace{\langle\mathbf{a}_k|\mathbf{g}\rangle}_{g_k}$$

Def: Norm eines Linearen Operator.

$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{|\mathbf{f}\rangle \in H,\, \|\mathbf{f}\| = 1} \left\|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\right\|$$

Axiome der Norm sind erfüllt !

$$N1: \quad \left\|\hat{A}\right\| > 0$$

$$N2: \quad \left\|\hat{A}\right\| = 0 \;\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{0}$$

$$\left\|\hat{A}\right\| = 0 \Rightarrow \forall\, |\mathbf{f}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle, \quad \left\|\hat{A}\,|\mathbf{f}\rangle\right\| = 0 \Rightarrow \hat{A}\,|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{0}\rangle.$$

$$\hat{A}\,\text{ist linear} \;\Rightarrow \hat{A}|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$$

$$\Rightarrow \forall\, |\mathbf{f}\rangle \in H \quad \hat{A}\,|\mathbf{f}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$$

$$N3: \quad \left\|\hat{A} + \hat{B}\right\| \leq \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\hat{B}\right\|$$

$$\left\|\hat{A} + \hat{B}\right\| = \sup_{|\mathbf{f}\rangle,\, \|\mathbf{f}\| = 1} \left\|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle + \hat{B}|\mathbf{f}\rangle\right\| \leq \sup_{|\mathbf{f}\rangle,\, \|\mathbf{f}\| = 1} \left[\left\|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\right\| + \left\|\hat{B}|\mathbf{f}\rangle\right\|\right] \leq$$

$$\sup_{|\mathbf{f}\rangle,\, \|\mathbf{f}\| = 1} \left\|\hat{A}|\mathbf{f}\rangle\right\| + \sup_{|\mathbf{f}\rangle,\, \|\mathbf{f}\| = 1} \left\|\hat{B}|\mathbf{f}\rangle\right\| = \left\|\hat{A}\right\| + \left\|\hat{B}\right\|$$

<u>Def:</u> $\hat{A}$ heißt beschränkt → $\left\|\hat{A}\right\| < \infty$

Schwarz'sche Ungleichung.

Biesp: $a)\quad \hat{P}_{\mathbf{f}} = |\mathbf{f}\rangle\langle\mathbf{f}|$

$$\left\|\hat{P}_{\mathbf{f}}\right\| = \sup_{|\mathbf{g}\rangle\in H,\||\mathbf{g}\rangle\|=1} \left\| |\mathbf{f}\rangle\langle\mathbf{f}|\mathbf{g}\rangle \right\| = \sup_{|\mathbf{g}\rangle\in H,\||\mathbf{g}\rangle\|=1} \left|\langle\mathbf{f}|\mathbf{g}\rangle\right| \left\||\mathbf{f}\rangle\right\| \leq$$

$$\sup_{|\mathbf{g}\rangle\in H,\||\mathbf{g}\rangle\|=1} \left\||\mathbf{f}\rangle\right\|\left\||\mathbf{g}\rangle\right\|\left\||\mathbf{f}\rangle\right\| = \left\||\mathbf{f}\rangle\right\|^2$$

$b)\quad L^2(\mathbb{R}):\quad \hat{X} = x$ ist nicht beschränkt da: $f_n(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/4} e^{-(x-n)^2/4}$

$$\left\|f_n(x)\right\|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x-n)^2/2} = 1 \quad \text{aber} \quad \left\|\hat{X}f_n(x)\right\|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-(x-n)^2/2} \propto n^2$$

Bem: $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = i\hat{1} \Leftrightarrow \hat{A}$ oder $\hat{B}$ ist nicht beschränkt

Inverse, Hermitesche, und Unitäre Operatoren.

Def: Sei $\hat{A}$ Operator in H. Der zu $\hat{A}$ inverse Operator, $\hat{A}^{-1}$ ist durch

$$\hat{A}\ \hat{A}^{-1}\ \left|\mathbf{f}\right\rangle = \hat{A}^{-1}\ \hat{A}\left|\mathbf{f}\right\rangle = \left|\mathbf{f}\right\rangle \quad \forall \in H$$ definiert.

Es gilt: $\boxed{\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}}$

Adjungiert Operator.

Def: Sei $\hat{A}$ Operator in H. Der zu $\hat{A}$ adjungiert Operator, $\hat{A}^{\dagger}$ ist durch

$$\left\langle \mathbf{g}\middle|\hat{A}\mathbf{f}\right\rangle = \left\langle \hat{A}^{\dagger}\mathbf{g}\middle|\mathbf{f}\right\rangle \quad \forall\ \left|\mathbf{f}\right\rangle,\ \left|\mathbf{g}\right\rangle \in H$$ definiert.

Äquivalente Definition $\left(\left\langle \mathbf{g}\right|\hat{A}\left|\mathbf{f}\right\rangle\right)^{*} = \left\langle \mathbf{f}\right|\hat{A}^{\dagger}\left|\mathbf{g}\right\rangle \quad \forall\ \left|\mathbf{f}\right\rangle,\ \left|\mathbf{g}\right\rangle \in H$

Folgerungen

a) $\hat{A}^\dagger$ ist linear.

b) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

c) $\left(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}\right)^\dagger = \alpha^*\hat{B}^\dagger + \beta^*\hat{B}^\dagger, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$

d) Matrix Darstellung von $\hat{A}^\dagger$ Sei $\left\{|\mathbf{a}_n\rangle\right\}$ *VONS* $\rightarrow \sum_n |\mathbf{a}_n\rangle\langle\mathbf{a}_n| = \hat{1}$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{1}\hat{A}^\dagger\hat{1} = \sum_{n,m}|\mathbf{a}_n\rangle\underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\hat{A}^\dagger|\mathbf{a}_m\rangle}_{\equiv A^\dagger{}_{n,m}}\langle\mathbf{a}_m| \qquad \hat{A} = \hat{1}\hat{A}\hat{1} = \sum_{n,m}|\mathbf{a}_n\rangle\underbrace{\langle\mathbf{a}_n|\hat{A}|\mathbf{a}_m\rangle}_{\equiv A_{n,m}}\langle\mathbf{a}_m|$$

$$\boxed{A^\dagger{}_{n,m} = \langle\mathbf{a}_n|\hat{A}^\dagger|\mathbf{a}_m\rangle = \left(\langle\mathbf{a}_m|\hat{A}|\mathbf{a}_n\rangle\right)^* = A^*{}_{m,n}}$$

$$\boxed{A^\dagger = A^{*T}}$$

Beisp: $L^2(\mathbb{R})$: $\hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$

$$\langle \mathbf{f} | \hat{P} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; f^*(x) \; \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \; g(x) = \underbrace{f^*(x)\, g(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{1}{i} \left(\frac{d}{dx} \; f^*(x) \right) \; g(x)$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, g^*(x) \left(\frac{1}{i} \frac{d}{dx} \; f \;\; (x) \right) \right]^* = \left(\langle \mathbf{g} | \hat{P} | \mathbf{f} \rangle \right)^*$$

→ In $L^2(\mathbb{R})$ ist $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$

Def: $\hat{A}$ heißt selbstadjungiert oder Hermitesch falls $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

<u>Eigenvektoren, Eigenwerte.</u>

<u>Def.</u> Sei $\hat{A}$ ein Lin. Operator in H. Ein Vektor $|\mathbf{a}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ heißt Eigenvektor mit eigenwert

$\alpha \in \mathbb{C}$ falls. $\hat{A}\,|\mathbf{a}\rangle = \alpha|\mathbf{a}\rangle$

<u>Def:</u> Die Menge alle Eigenwerte heißt Spektrum von $\hat{A}$

<u>Satz:</u> Sei $\hat{A}$ ein Lin. Operator in H mit $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Dann gilt für

$$\hat{A}\,|\mathbf{a}_i\rangle = \alpha_i\,|\mathbf{a}_i\rangle\,, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{ und } \langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = 0 \text{ für } \alpha_i \neq \alpha_j$$

<u>Bew:</u>

$$0 = \langle \mathbf{a}_j | \hat{A} | \mathbf{a}_i \rangle - \left(\langle \mathbf{a}_i | \hat{A}^\dagger | \mathbf{a}_j \rangle\right)^* = \langle \mathbf{a}_j | \hat{A} | \mathbf{a}_i \rangle - \left(\langle \mathbf{a}_i | \hat{A} | \mathbf{a}_j \rangle\right)^* = \left(\alpha_i - \alpha_j^*\right)\langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle$$

a) $i = j \;\Rightarrow\; 0 = \left(\alpha_i - \alpha_i^*\right)\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \rangle \Rightarrow\; \alpha_i = \alpha_i^* \Rightarrow\; \alpha_i \in \mathbb{R}$

b) $i \neq j \;\Rightarrow\; 0 = \left(\alpha_i - \alpha_j^*\right)\langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle \Rightarrow\; \langle \mathbf{a}_j | \mathbf{a}_i \rangle = 0$ da $\alpha_i \neq \alpha_j$

Bem. Für $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, $\hat{A}\left|\mathbf{a}_i\right\rangle = \alpha_i\left|\mathbf{a}_i\right\rangle$ und $\left\langle\mathbf{a}_i\middle|\mathbf{a}_j\right\rangle = \delta_{i,j}$ dann ist $\left\{\mathbf{a}_j\right\}$ *VONS*

Konsequenz (Definitions-bereich von $\hat{A}$ sei H) .

$$\hat{A} = \hat{A}\hat{1} = \hat{A}\sum_n \left|\mathbf{a}_n\right\rangle\left\langle\mathbf{a}_n\right| = \sum_n \alpha_n \left|\mathbf{a}_n\right\rangle\left\langle\mathbf{a}_n\right|$$

Def: Unitäre Operatoren. Ein Lin. Operator, $\hat{U}$, in H heißt Unitär falls.

$$\left\langle\hat{U}\mathbf{g}\middle|\hat{U}\mathbf{f}\right\rangle = \left\langle\mathbf{g}\middle|\mathbf{f}\right\rangle \quad \forall \left|\mathbf{f}\right\rangle, \left|\mathbf{g}\right\rangle \in H$$

Folgerung. $\left\langle\hat{U}^\dagger\hat{U}\mathbf{g}\middle|\mathbf{f}\right\rangle = \left\langle\mathbf{g}\middle|\mathbf{f}\right\rangle \quad \forall\left|\mathbf{f}\right\rangle, \left|\mathbf{g}\right\rangle \in H$ $\qquad \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}$

Funktion von Operatoren ist durch die Taylor Entwicklung definiert.

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)\Big|_{x=0} \frac{x^n}{n!}$ dann ist $f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)\Big|_{x=0} \frac{\hat{A}^n}{n!}$

Beispiele

a) Sei $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\hat{U} = e^{i\alpha\hat{A}}$, unitär da $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}$

Es gilt für $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\alpha A} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Baker-Hausdorf.

Sei $\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{A}\right] = \left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{B}\right] = 0$ dann gilt: $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\left[\hat{A},\hat{B}\right]/2}$

Bew:

Sei $\hat{U}(t) = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}$, $t \in \mathbb{R}$ so dass:

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = e^{t\hat{A}}\hat{A}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}\hat{B} = e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}e^{-t\hat{B}}\hat{A}e^{t\hat{B}} + e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}}\hat{B} = \hat{U}(t)e^{-t\hat{B}}\hat{A}e^{t\hat{B}} + \hat{U}(t)\hat{B}$$

Aber: $\frac{d}{dt}e^{-t\hat{B}}\hat{A}e^{t\hat{B}} = e^{-t\hat{B}}\left[\hat{A},\hat{B}\right]e^{t\hat{B}} = \left[\hat{A},\hat{B}\right]$ da $\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{B}\right] = 0$

$$e^{-t\hat{B}}\hat{A}e^{t\hat{B}} = \left[\hat{A},\hat{B}\right]t + \hat{A}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\left(\left[\hat{A},\hat{B}\right]t + \hat{A} + \hat{B}\right) \Rightarrow \hat{U}(t) = e^{\left[\hat{A},\hat{B}\right]t^2/2 + (\hat{A}+\hat{B})t}$$

Für t=1 ist der Satz bewiesen.

Tensorprodukt Zwei Hilberträume.

Sei $\left\{ \left| \mathbf{a}_i \right\rangle \right\}_{i:1\cdots M}$ VONS von H_1 und $\left\{ \left| \mathbf{b}_j \right\rangle \right\}_{j:1\cdots N}$ VONS von H_2

Dann ist $\left\{ \left| \mathbf{a}_i \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_j \right\rangle \right\}_{i:1\cdots M,\ j:1\cdots N}$ VONS von $H_1 \otimes H_2$ so dass:

$$\forall\ \left| \mathbf{f} \right\rangle \in H_1 \otimes H_2\ , \quad \left| \mathbf{f} \right\rangle = \sum_{i:1\cdots M,\ j:1\cdots N} \alpha_{i,j} \left| \mathbf{a}_i \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_j \right\rangle$$

Skalarprodukt. $\left| \mathbf{f} \right\rangle = \sum_{i:1\cdots M,\ j:1\cdots N} \alpha_{i,j} \left| \mathbf{a}_i \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_j \right\rangle$ und $\left| \mathbf{g} \right\rangle = \sum_{i:1\cdots M,\ j:1\cdots N} \beta_{i,j} \left| \mathbf{a}_i \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_j \right\rangle$

$$\left\langle \mathbf{f} \middle| \mathbf{g} \right\rangle = \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j}{}^* \left\langle \mathbf{a}_i \right| \otimes \left\langle \mathbf{b}_j \right| \right) \left(\sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \beta_{k,l} \left| \mathbf{a}_k \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_l \right\rangle \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{i,j}{}^* \beta_{k,l} \left(\left\langle \mathbf{a}_i \right| \otimes \left\langle \mathbf{b}_j \right| \right) \left(\left| \mathbf{a}_k \right\rangle \otimes \left| \mathbf{b}_l \right\rangle \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{i,j}{}^* \beta_{k,l} \underbrace{\left\langle \mathbf{a}_i \middle| \mathbf{a}_k \right\rangle} \underbrace{\left\langle \mathbf{b}_j \middle| \mathbf{b}_l \right\rangle} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j}{}^* \beta_{i,j}$$

Skalarprodukt in H_1

Skalarprodukt in H_2

Es gilt: $\quad \dim(H_1 \otimes H_2) = \dim(H_1)\ \dim(H_2)$

Ort. Spin

Beisp: a) Spin ½ Teilchen in ein Dimension. $\quad H = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$

Spin

b) Spin ½ Teilchen in drei Dimensionen $\quad H = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$

x- y- z -Komponente

c) Zwei Spin ½ : $\quad H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$\text{Basis von } \mathbb{C}^2 : \left\{ \left|\uparrow\right\rangle , \left|\downarrow\right\rangle \right\}$$

$$\text{Basis von } H = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 : \left\{ \left|\uparrow\right\rangle \otimes \left|\uparrow\right\rangle , \left|\uparrow\right\rangle \otimes \left|\downarrow\right\rangle , \left|\downarrow\right\rangle \otimes \left|\uparrow\right\rangle , \left|\downarrow\right\rangle \otimes \left|\downarrow\right\rangle \right\}$$

Lin. Operatoren auf Tensorprodukt Hilberträume

Sei $H = H_1 \otimes H_2$ mit $\{|\mathbf{a}_i\rangle\}$ VONS von H_1 und $\{|\mathbf{b}_j\rangle\}$ VONS von H_2

Ein Lin. Operator $\hat{A}: \ H \to H$ ist durch $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ mit $\hat{A}_1 : H_1 \to H_1$ und $\hat{A}_2 : H_2 \to H_2$ gegeben.

Es gilt: $\forall |\mathbf{f}\rangle \in H \quad |\mathbf{f}\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} |\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle$, $\quad \hat{A}|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \ \hat{A}_1|\mathbf{a}_i\rangle \otimes \hat{A}_2|\mathbf{b}_j\rangle$

Beisp: a) $\hat{1} = \hat{1}_1 \otimes \hat{1}_2 = \left(\sum_i |\mathbf{a}_i\rangle\langle\mathbf{a}_i|\right) \otimes \left(\sum_j |\mathbf{b}_j\rangle\langle\mathbf{b}_j|\right) = \sum_i \sum_j |\mathbf{a}_i\rangle\langle\mathbf{a}_i| \otimes |\mathbf{b}_j\rangle\langle\mathbf{b}_j|$

$$= \sum_i \sum_j \left(|\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle\right)\left(\langle\mathbf{a}_i| \otimes \langle\mathbf{b}_j|\right)$$

Letzte schritt folgt aus der Tatsache dass, $|\mathbf{a}_i\rangle \otimes |\mathbf{b}_j\rangle$ ein Basis von $H_1 \otimes H_2$ ist.

b) $H = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$

$$\hat{A} = \hat{P} \otimes \hat{S} \ , \quad \hat{P} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} \ , \quad \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Distributionen, Dirac δ-funktion.

Def. Schwartz'sche Raum.

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi(x) \mid \varphi(x) \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}), \ \max_x \ |x^{\alpha} \frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}} \varphi(x)| < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}$$

Beisp. $e^{-x^2} \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ aber $\frac{1}{1+x^2} \notin \mathbb{S}(\mathbb{R})$

Bem. $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ Liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$. d.h $\exists$ *VONS* von $L^2(\mathbb{R})$, $\{\mathbf{a}_i\}$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$

Def: Die Linearen, stetigen Funktionale über $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ nennt man Distributionen. Die Menge der Distributionen bilden der zu $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ dualer Raum: $\widetilde{\mathbb{S}(\mathbb{R})}$

$L \in \widetilde{\mathbb{S}(\mathbb{R})}: \ L : \mathbb{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $L(\varphi) \in \mathbb{C}$

Bem:

$$L(\varphi) = L\left(\sum_i \mathbf{a}_i \langle \mathbf{a}_i | \varphi \rangle\right) = \sum_i L(\mathbf{a}_i) \langle \mathbf{a}_i | \varphi \rangle = \left\langle \underbrace{\sum_i L(\mathbf{a}_i)^* \mathbf{a}_i}_{=\mathbf{g}^*} \middle| \varphi \right\rangle = \langle \mathbf{g}^* | \varphi \rangle =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \mathbf{g}(x) \varphi(x) \equiv L_g(\varphi)$$

Beisp: Dirac δ-Funktion.

$$L_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta(x)\,\varphi(x) \;\; \equiv \;\; \varphi(0)$$

Heaviside Funktion.

$$L_\Theta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \Theta(x)\,\varphi(x) \;\; \equiv \;\; \int_{0}^{\infty} dx \;\; \varphi(x)$$

δ-Folgen. Satz: Sei $g_1(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g_1(x) = 1$

Sei $g_n(x) = n\, g_1(nx)$

Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \; = \; \delta(x)$

d.h. $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\, g_n(x) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\; \delta(x) \;\; = \varphi(0) \;\; \forall \;\; \varphi(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$$

Beisp: $$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} dk\, e^{ikx} = n\, g_1(nx), \quad \text{mit} \quad g_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\text{Da} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ g_1(x) = 1 \quad \text{gilt} \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \delta(x)}$$

Konsequenz: Fourier Transform.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\tilde{f}(k) \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx} f(x)$$

Bew:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \ e^{iky} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ik(x-y)}}_{\delta(x-y)} f(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \delta(x-y) f(y) = f(x)$$

Die Fourier Transformation ist eine Unitäre Transformation in $L^2(\mathbb{R})$

<u>Bew:</u>

Sei: $$(\hat{U}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) = \tilde{f}(k)$$

$$\langle \hat{U}f | \hat{U}g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \tilde{f}^{\,*}(k)\, \tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ikx} f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} g(y) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} f^*(x) g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; \delta(x-y) f^*(x) g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) g(x) = \langle f | g \rangle$$

Bemerkung. Jede Funktion kann man als Distribution auffassen.

d.h. $f(x)$ ist durch Kenntnis von $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi(x)\ f(x)\ \ \forall\ \varphi(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt

Bew: Sei $f_1(x) \neq f(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi(x)\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi(x)\ f_1(x) \quad \forall\ \varphi(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi(x)\left[f(x) - f_1(x)\right] = 0 \qquad \forall\ \varphi(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{(ikx)^n}{n!}\varphi(x)\left[f(x) - f_1(x)\right] = 0 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx}\overbrace{\varphi(x)\left[f(x) - f_1(x)\right]}^{= g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(k) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\tilde{g}(k) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x)\left[f(x) - f_1(x)\right] = 0 \qquad \forall\ \varphi(x) \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \quad f(x) = f_1(x) \Rightarrow$ Widerspruch

Ableitung von Distributionen.

Sei $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, f kann man als Distribution auffassen:

$$L_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\varphi(x), \quad f'$$ kann man auch als Distribution auffassen

$$L_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f'(x)\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\frac{d}{dx}\varphi(x) = -L_f\left(\frac{d}{dx}\varphi\right)$$

Def:

$$L_{\frac{d^n}{dx^n}f}(\varphi) = (-1)^n L_f\left(\frac{d^n}{dx^n}\varphi\right)$$

Eigenschaften von Dirac δ-Funktion

- $x\delta(x) = 0$
- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$
- $\frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$