

Zusammenfassung (12.5).

Hilbertraum, Dirac-Notation.

QM System \longrightarrow Menge von Zustände (z.b. Zustände Teilchen in unendliche Potentialtopf. $\psi_n(x)$)

Zustände identifizieren wir zu Vektoren $|\alpha\rangle$ in abstrakte **Hilbertraum** \mathcal{H}

$$\text{Ket. } |\alpha\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\infty \end{pmatrix} \quad a_i \in \mathbb{C} \quad \text{z.b.} \quad |n\rangle \rightarrow \psi_n(x)$$

Duale Zustand Vektor zu $|\alpha\rangle$

$$\text{Bra. } \langle\alpha| \rightarrow (a_1^*, \dots, a_\infty^*)$$

$$\text{Skalarprodukt. } |\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle\alpha|\beta\rangle \rightarrow a_1^* b_1 + \dots + a_\infty^* b_\infty$$

$$\text{Orthogonalität. } \langle\alpha|\beta\rangle = 0 \Rightarrow |\alpha\rangle, |\beta\rangle \quad \text{Orthogonal zueinander.}$$

Norm (durch Skalarprodukt induziert)

$$\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle} \quad \text{Es gilt } \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$
$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$$

Basis Vollständig Orthonormalsystem (**VONS**)

$\exists |\phi_n\rangle, n=1 \dots \infty, \in \mathcal{H}$ so dass:

1) $\forall |\alpha\rangle \in \mathcal{H} \quad |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \alpha \rangle$ Vollständigkeit.

2) $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ Orthonormal.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |\phi_n\rangle = 0 \Rightarrow a_i = 0 (i:1 \dots \infty)$ Linear unabhängig

Darstellung des Eins.

Aus Vollständigkeit folgt:

$$\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

Beispiel.

a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Geeignet für zwei-niveau System.

Darstellung der Eins.

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

b) **Impuls und Ort Basen**, Teilchen in \mathbb{R}^3

$|\mathbf{p}\rangle \rightarrow$ Teilchen mit Impuls \mathbf{p}

$|\mathbf{x}\rangle \rightarrow$ Teilchen am Ort \mathbf{x}

Orthogonal $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$,

$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$,

Vollständigkeit. $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} |\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| = \mathbf{1}$

$\int d^3\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}| = \mathbf{1}$

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ $\langle \mathbf{p} | \Psi \rangle = \tilde{\Psi}(\mathbf{p})$

$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = \Psi(\mathbf{x})$

Basis Transformationen.

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{1} | \psi \rangle = \langle \mathbf{x} | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle}_{= e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}/\hbar} \tilde{\psi}(\mathbf{p})\end{aligned}$$

Vergleich Kap. II.

Norm

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \int d^3 \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2$$

Zusammenfassung (15.5).

Linear Operatoren $\hat{\mathbf{A}}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a\hat{\mathbf{A}}|\alpha\rangle + b\hat{\mathbf{A}}|\beta\rangle$ mit $\hat{\mathbf{A}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Adjungiert Operator. $\hat{\mathbf{A}}^+ : \langle\beta|\hat{\mathbf{A}}|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\hat{\mathbf{A}}^+|\beta\rangle)^*$

Kommutator: $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$

Funktion eines Operators ist durch Taylor Entwicklung definiert: $\exp(\hat{\mathbf{A}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\mathbf{A}}^n}{n!}$

Operatoren lassen sich als **Matrizen Darstellen:**

$$\text{Sei } \{|n\rangle\} \text{ VONS } \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_{n,m} \underbrace{\langle n|\hat{\mathbf{A}}|m\rangle}_{=A_{n,m}} |n\rangle\langle m|$$

$\hat{\mathbf{A}}$ Hermitesch: $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+$

$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \exists \{|\alpha_n\rangle\} \mid \{|\alpha_n\rangle\} \text{ VONS und } \hat{\mathbf{A}}|\alpha_n\rangle = a_n|\alpha_n\rangle \text{ mit } a_n \in \mathbb{R}$

$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_n a_n |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$ **Spektral Darstellung eines hermitesch Operator.**

Erwartungswert eines Operator für den Zustand

$$|\psi\rangle \quad \langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Messgrößen entsprechen hermiteschen Operatoren.

$$\hat{A}^+ = \hat{A} \quad \Rightarrow \quad \langle \hat{A} \rangle = \sum a_n |\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$$

Beisp. Hamilton Operator.

$$\hat{H} = \hat{H}^+, \quad \hat{H} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle, \quad \hat{H} = \sum_n E_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

Impuls Operator.

$$\hat{P} = \hat{P}^+, \quad \hat{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle, \quad \hat{P} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|$$

$$\langle \mathbf{x}' | \hat{P} | \mathbf{x} \rangle = \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{x}}$$

Ort Operator.

$$\hat{X} = \hat{X}^+, \quad \hat{X} |\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle, \quad \hat{X} = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|$$

Postulate der QM.

P1. Jedes Zustand eines QM System wird durch ein Element $|\psi\rangle$ des Hilbertraumes \mathcal{H} beschrieben.

P2. Messbaren Größen (Observablen) entsprechen hermitesche Operatoren.

P3. Erwartungswert einer Observablen $\hat{\mathbf{A}}$ in einem gegebenen Zustand $|\psi\rangle$ wird durch $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \langle \psi | \hat{\mathbf{A}} | \psi \rangle$ gegeben.

P4. Die Zeitentwicklung der Zustände wird durch den Hamilton Operator bestimmt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

P5. Es können für einen Observablen $\hat{\mathbf{A}}$ nur die Eigenwerte als Messergebnis auftreten.

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} = \sum_n a_n |\alpha_n\rangle \langle \alpha_n| \quad \text{und} \quad \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \sum a_n |\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$$

$|\langle \alpha_n | \psi \rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit Messergebnis a_n zu erhalten.

Falls a_n gemessen wird dann geht der Zustand des Systems in den entsprechenden

Eigenzustand $|\alpha_n\rangle$

Zusammenfassung 19.5.

Unschärferelation: $\hat{\mathbf{A}}^+ = \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}^+ = \hat{\mathbf{B}}, \Delta\mathbf{A}^2 = \left\langle \left(\hat{\mathbf{A}} - \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle \right)^2 \right\rangle$ Standardabweichung vom Mittelwert.

$$\Delta\mathbf{A} \Delta\mathbf{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}] | \psi \rangle \right| \quad \text{Beisp: } [\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{X}}] = \frac{\hbar}{i} \quad \text{so dass } \Delta\mathbf{P} \Delta\mathbf{X} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Bewegungsgleichungen des Operatoren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}} |\psi(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar} |\psi(t=0)\rangle$$

$$\langle \psi(t) | \hat{\mathbf{A}} | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t=0) | \underbrace{e^{i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar} \hat{\mathbf{A}} e^{-i\hat{\mathbf{H}}t/\hbar}}_{=\hat{\mathbf{A}}(t)} | \psi(t=0) \rangle$$

$\hat{\mathbf{A}}(t)$: Heisenberg-Darstellung.

Bewegungsgleichung:
$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{A}}(t)]$$

Ehrenfest Theorem

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}})$$

Im Ortsdarstellung gilt: $m \frac{d^2}{dt^2} \langle \mathbf{X}(t) \rangle = -\langle \nabla_x V(\mathbf{X}) \rangle = \langle F(\mathbf{X}) \rangle$ Ähnlich zu Newton.

Äquivalenz ist nicht streng da im allgemein: $\langle F(\mathbf{X}) \rangle \neq F(\langle \mathbf{X} \rangle)$

Dichtematrix Formulierung.

Reine Zustand. $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ Dann gilt $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \langle \psi | \hat{\mathbf{A}} | \psi \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\mathbf{A}}]$

Gemischte Zustand.

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad \text{Dann gilt} \quad \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\mathbf{A}}] = \sum_n p_n \langle \psi_n | \hat{\mathbf{A}} | \psi_n \rangle$$

p_n : Wahrscheinlichkeit dass reine Zustand $|\psi_n\rangle$ vorkommt.

Beispiel: QM System bei endliche Temperatur, T.

$$\hat{\mathbf{H}}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \quad \text{mit} \quad p_n = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\sum_n e^{-E_n/k_B T}}, \quad k_B : \text{Boltzmann Konst.}$$

Bem: Einen gemischten Zustand können wir nicht als Vektor im Hilbertraum Darstellen, da er nicht einen Linearkombination (kohärent Überlagerung) von mehreren Zuständen entspricht.

Zeitevolution der Dichtematrix.

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\rho}(t)]$$

Bewegungsgleichung für
Operatoren in Heisenberg Darstellung.:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{A}}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{A}}(t)]$$

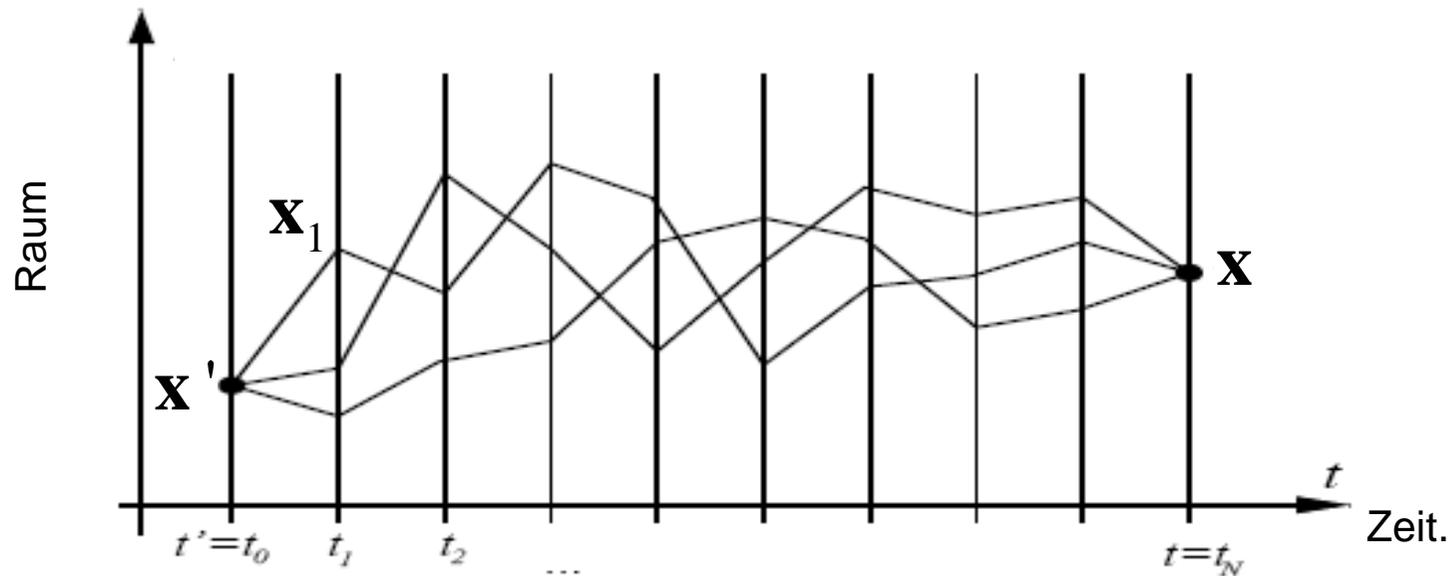
Zusammenfassung 22.5

6. Pfad Integral Formulierung.

Propagator:

$$t_j = t' + j \frac{t-t'}{N} \quad j=0,1,\dots,N \quad t' < t$$

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t-t') &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\hat{H}(t-t')/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle = \\ &\int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \cdots d^3\mathbf{x}_{N-1} \langle \mathbf{x} | e^{-it\hat{H}(t_N-t_{N-1})/\hbar} | \mathbf{x}_{N-1} \rangle \langle \mathbf{x}_{N-1} | e^{-it\hat{H}(t_{N-1}-t_{N-2})/\hbar} | \mathbf{x}_{N-2} \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_1 | e^{-it\hat{H}(t_1-t_0)/\hbar} | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \\ &\int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \cdots d^3\mathbf{x}_{N-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{N-1}, t_N - t_{N-1}) K(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_{N-2}, t_{N-1} - t_{N-2}) \cdots K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', t_1 - t_0) \end{aligned}$$



Für: $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{X}})$ gilt

$$K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j-1}, t_j - t_{j-1} = \varepsilon) \underset{\varepsilon \ll 1}{\cong} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \right)$$

so dass:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') =$$

$$\int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{N-1}, t_N - t_{N-1}) K(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_{N-2}, t_{N-1} - t_{N-2}) \cdots K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}', t_1 - t_0) \cong$$

$$\int \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3(N-1)/2} d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \varepsilon \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \right)$$

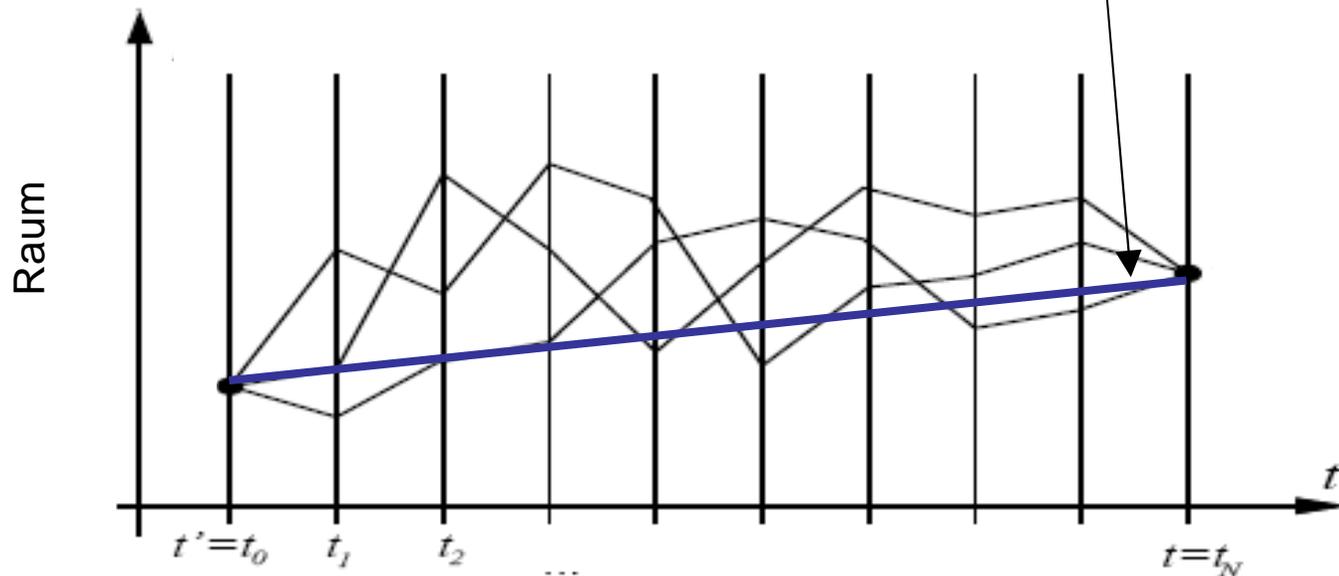
$$\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \cong \dot{\mathbf{x}}(t_j) \quad , \quad \sum_{j=1}^N \varepsilon \left(\frac{m}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1}}{\varepsilon} \right]^2 - V(\mathbf{x}_{j-1}) \right) \approx \int_{t'}^t ds \quad \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s))$$

$$\int \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3N/2} d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \cdots d^3 \mathbf{x}_{N-1} = \int \{D\mathbf{x}(s)\} \quad \text{Integral über alle Pfade}$$

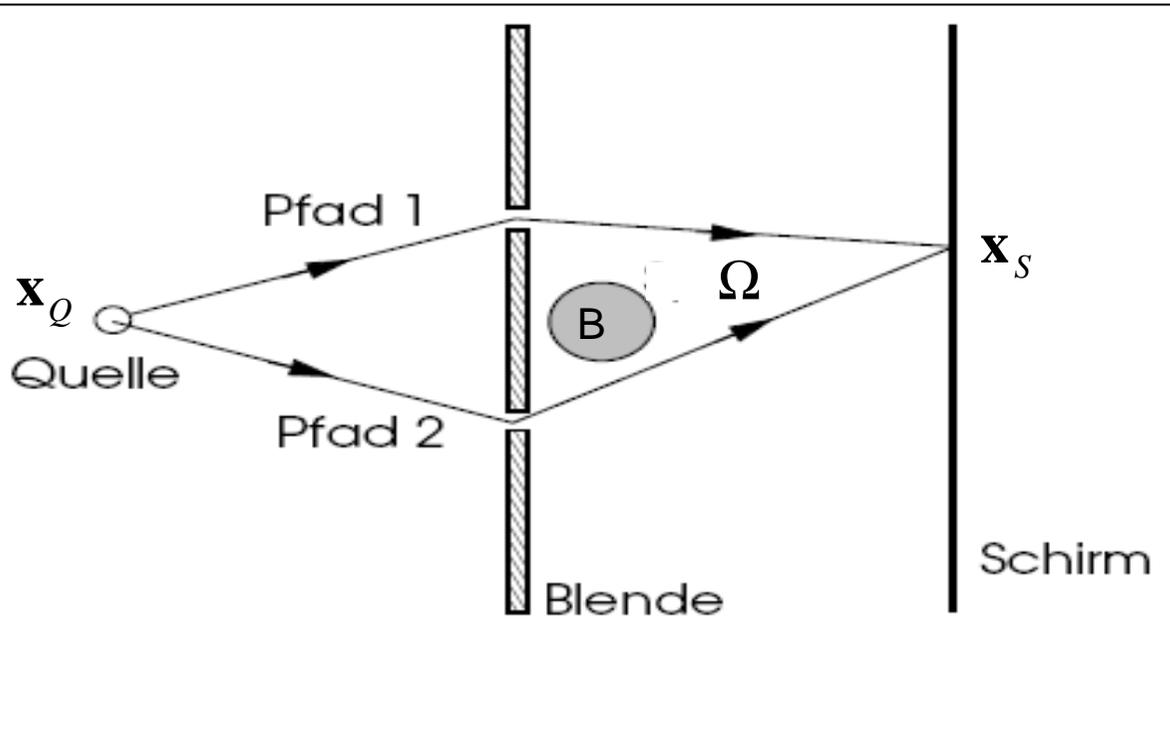
$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') \cong \int \{D\mathbf{x}(s)\} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t ds \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s))}_{=L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})} \right)$$

$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$: Klassische Lagrange Funktion.

$$\delta \int_{t'}^t ds \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2(s) - V(\mathbf{x}(s)) = 0 \quad \text{Klassische Pfad.}$$



Beisp: Aharonov-Bohm Effekt (1959).



$$K(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_Q, t) \approx \sum_{\text{Pfad}, j=1,2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds L(\mathbf{x}_j(s), \dot{\mathbf{x}}_j(s))\right)$$

Mit

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m \dot{\mathbf{x}}^2 / 2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

(cgs Einheiten) und

$$\psi(\mathbf{x}, t=0) \approx \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_Q)$$

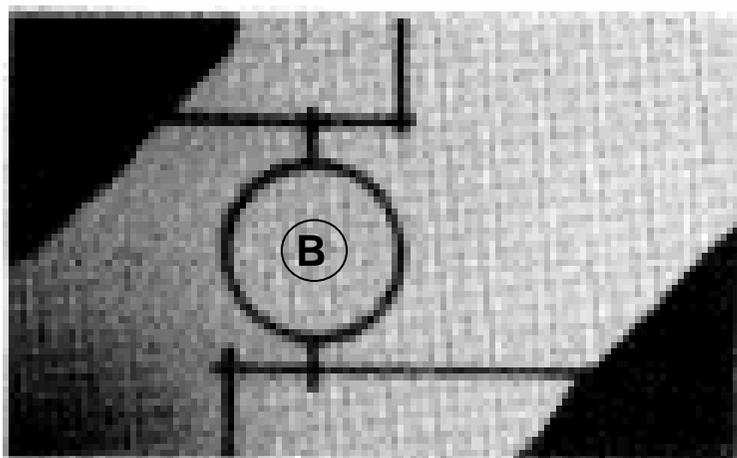
$$|\psi(\mathbf{x}_S, t)|^2 \approx |K(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_Q, t)|^2 \approx |K_1^0|^2 + |K_2^0|^2 + 2 \operatorname{Re}(K_1^{0*} K_2^0 e^{2\pi i \Phi / \Phi_0})$$

$$K_j^0 = e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\text{Pfad } j} ds m \dot{\mathbf{x}}_j^2(s) / 2}, \quad \Phi = \int_{\Omega} d\Omega \cdot \mathbf{B}, \quad \Phi_0 = 2\pi \hbar c / e \quad \text{Magnetische Fluss Quanta}$$

Interferenz Muster ändert sich periodisch mit Periode Φ / Φ_0 Effekt hängt nur von Mag. Fluss durch Ω

Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings

R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz
IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York 10598
(Received 27 March 1985)



Mesokopischer Metallischer Ring.

The inset is a photograph of the larger ring. The inside diameter of the loop is 784 nm, and the width of the wires is 41 nm.

