

$$1.a, \quad \psi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$$

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 = |\langle \vec{x} | \psi(t) \rangle|^2$$

$$(\quad = \langle \psi(t) | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle)$$

$$P(V, t) = \int_V d^3\vec{x} \, \rho(\vec{x}, t)$$

1.b, Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi^*(\vec{x}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)) = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \cdot \psi + \psi^* \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) = \cancel{\frac{\hbar i}{2m}}$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \underbrace{\frac{\hbar i}{2m} [(\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* (\vec{\nabla} \psi)]}_{=: \vec{j}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0, \text{ Kontinuitätsgleichung}$$

$$1.c, \quad \langle \hat{X} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle$$

$$(\quad = \int d^3\vec{x} \, \psi^*(\vec{x}, t) \hat{X} \psi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{x} \, \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{x})$$

$\langle \hat{X} \rangle$ ist der Mittelwert der Messergebnisse im Grenzfall $n \rightarrow \infty$, wenn man in n quantenmechanischen Systemen, die sich alle im Zustand $|\psi\rangle$ befinden, jeweils eine Ortsmessung durchführt.

$$\langle \hat{X} \rangle_n(t) = \langle \psi_n(t) | \hat{X} | \psi_n(t) \rangle = \langle \psi(t) | e^{-i\phi} \hat{X} e^{i\phi} | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(t) | \hat{X} | \psi(t) \rangle \cdot e^{-i\phi} e^{i\phi} = \langle \hat{X} \rangle(t)$$

$$1.d, \quad \tilde{\psi}(\vec{p}, t) = \langle \vec{p} | \psi(t) \rangle$$

$|\tilde{\psi}(\vec{p}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass eine Messung des Impulses des Teilchens zur Zeit t den Messwert $\vec{p}$ ergibt.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{p}, t) &= \langle \vec{p} | \int d^3\vec{x} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x} | \psi(t) \rangle = \int d^3\vec{x} \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \psi(\vec{x}, t) \\ &= \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p} / \hbar} \psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\vec{p}} \rangle(t) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{p}, t) \vec{p} \tilde{\psi}(\vec{p}, t) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{p}, t) \int d^3\vec{x} \psi(\vec{x}, t) \underbrace{\vec{p} \cdot e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p} / \hbar}}_{= i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}} e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p} / \hbar}} \\ &\stackrel{P.I.}{=} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{\psi}^*(\vec{p}, t) \int d^3\vec{x} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t) \right) \cdot e^{-i\vec{x} \cdot \vec{p} / \hbar} \\ &= \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \psi^*(\vec{x}', t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t) \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} e^{i(\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p} / \hbar}}_{= \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})} \\ &= \int d^3\vec{x} \psi^*(\vec{x}, t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Randterm aus partieller Integration:

$$i\hbar \int d^3\vec{x}' \psi^*(\vec{x}', t) \psi(\vec{x}, t) \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}) \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty}$$

$$= i\hbar |\psi(\vec{x}, t)|^2 \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \propto g(\vec{x}, t) \Big|_{|\vec{x}| \rightarrow \infty}$$

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 \Rightarrow g(\vec{x}, t) \rightarrow 0 \text{ für } |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

$$\text{Im Ortsraum: } \hat{x}_i \rightarrow x_i, \quad \hat{p}_j \rightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_j, \quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\begin{aligned} [x_i, \partial_j] \psi(\vec{x}) &= (x_i \partial_j - \partial_j x_i) \psi(\vec{x}) = x_i \partial_j \psi(\vec{x}) - \partial_j (x_i \psi(\vec{x})) = \\ &= x_i \partial_j \psi - \delta_{ij} \psi - x_i \partial_j \psi = -\delta_{ij} \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \frac{\hbar}{i} (-\delta_{ij}) = i\hbar \delta_{ij}$$

Simultane Eigenzustandsbasis $\Leftrightarrow [\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$
 $\hat{x}_i$ und $\hat{p}_j$ können genau dann simultan gemessen werden falls $i \neq j$.
 Untergrenze für $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ Messung: $\frac{\hbar}{2} \delta_{ij} = \begin{cases} \frac{\hbar}{2} & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$