Aufgabe 2a

Teil (i)

$$\hat{\mathcal{P}}^2|x\rangle = \hat{\mathcal{P}}|-x\rangle = |x\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{P}}^2 = \mathbb{1}$$

Teil (ii)

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{\mathcal{P}}^\dagger|y\rangle &= \langle y|\hat{\mathcal{P}}|x\rangle^* = \langle y|-x\rangle^* = \langle -x|y\rangle = \delta(-x-y) \\ &= \delta(x+y) = \langle x|-y\rangle = \langle x|\hat{\mathcal{P}}|y\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\mathcal{P}}\end{aligned}$$

Teil (iii)

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{X}\hat{\mathcal{P}}|x\rangle &= \hat{\mathcal{P}}\hat{X}|-x\rangle = -x\hat{\mathcal{P}}|-x\rangle \\ &= -x|x\rangle = -\hat{\mathcal{P}}|x\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{P}}\hat{X}\hat{\mathcal{P}} = -\hat{P}\end{aligned}$$

Teil (iv)

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}|p\rangle &= \hat{\mathcal{P}}\int dx|x\rangle\langle x|p\rangle = \int dx|-x\rangle\langle x|p\rangle \\ &= \int dy|y\rangle\langle -y|p\rangle = \int dy|y\rangle\langle y|-p\rangle = |-p\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{P}}|p\rangle = |-p\rangle\end{aligned}$$

[<u>Bem.:</u> $\langle -y|p\rangle = e^{-ipy/\hbar} = \langle y|-p\rangle$]

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}\hat{P}\hat{\mathcal{P}}|p\rangle &= \hat{\mathcal{P}}\hat{P}|-p\rangle = -p\hat{\mathcal{P}}|-p\rangle \\ &= -p|p\rangle = -\hat{\mathcal{P}}|p\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{P}}\hat{P}\hat{\mathcal{P}} = -\hat{P}\end{aligned}$$

Teil (v)

$$\hat{\mathcal{P}}^2|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle = |\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

Invarianz des Hamilton-Operators:

Gegeben: $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}) \quad \text{mit} \quad V(\hat{X}) = V(-\hat{X})$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{P}}^\dagger\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{P}} &= \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{H}}\hat{\mathcal{P}} \\ &= \tfrac{1}{2m}\hat{\mathcal{P}}\hat{P}\mathbb{1}\hat{P}\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{P}}V(\hat{X})\hat{\mathcal{P}} \\ &= \tfrac{1}{2m}\hat{\mathcal{P}}\hat{P}\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{P}}\hat{P}\hat{\mathcal{P}} + V(\hat{\mathcal{P}}\hat{X}\hat{\mathcal{P}}) \\ &= \tfrac{1}{2m}(-\hat{P})(-\hat{P}) + V(-\hat{X}) \\ &= \tfrac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}) = \hat{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

[<u>Bem.:</u> $\hat{\mathcal{P}}V(\hat{X})\hat{\mathcal{P}} = \sum_n a_n\hat{\mathcal{P}}\hat{X}^n\hat{\mathcal{P}} + \sum_n a_n(\hat{\mathcal{P}}\hat{X}\hat{\mathcal{P}})^n = V(\hat{\mathcal{P}}\hat{X}\hat{\mathcal{P}})$]

Aufgabe 2b

Aus der Invarianz des Hamilton-Operator unter Paritätstransformation folgt, dass die Energie-Eigenzustände eine gerade bzw. ungerade Parität besitzen müssen.

gerade Lösung

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{q(x+a)} & I \\ 2B\cos(kx) & II \\ Ae^{-q(x-a)} & III \end{cases}$$

Durch Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung ergibt sich:

$$q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \qquad \text{und} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{q}{k} = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2(ka)^2} - 1}$$

Anschlussbedingungen:

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad 2B\cos(ka) = A$$
$$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad -k2B\sin(ka) = -qA$$

$$\Rightarrow -k\tan(ka) = -q \quad \text{bzw.} \quad \tan(ka) = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2(ka)^2} - 1}$$

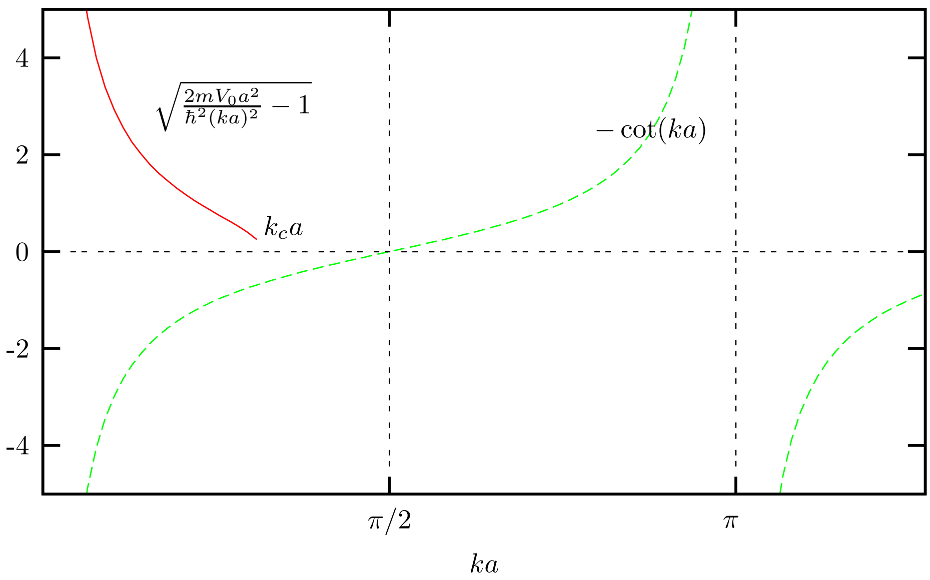
ungerade Lösung

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{q(x+a)} & I \\ 2B\sin(kx) & II \\ -Ae^{-q(x-a)} & III \end{cases}$$

Anschlussbedingungen:

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad 2B\sin(ka) = -A$$
$$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) \quad \Rightarrow \quad k2B\cos(ka) = +qA$$

$$\Rightarrow k\cot(ka) = -q \quad \text{bzw.} \quad -\cot(ka) = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2(ka)^2} - 1}$$



Aufgabe 2c

Es gibt in jedem Fall eine gerade Lösung, eine ungerade Lösung nicht immer.

Es gibt keine ungerade Lösung, falls $k_c a < \pi/2$. $k_c a$ bestimmt sich durch:

$$\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2(k_c a)^2} - 1} = 0$$

$$k_c a = \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}}$$

D.h., es gibt keine ungerade Lösung für den Fall:

$$\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} < \frac{\pi}{2}$$