Poisson-Verteilung

Die Normal-Verteilung ist eine kontinuierliche Verteilung

Die Binomial-Verteilung ist diskret.

Eine weitere diskrete Verteilung ist die Poisson-Verteilung.

Die Anwendung der Poisson-Verteilung ist breit gefächert:

- Anzahl der Telefongespräche, die in einer bestimmten Zeit bei einer Firma eintreffen.
- Anzahl der Kunden an einem Bankschalter pro Zeiteinheit.
- Anzahl der Bakterien pro Liter Nährlösung.
- Anzahl der Verkehrsunfälle pro Zeiteinheit an einer Kreuzung.
- Anzahl der in einer bestimmten Zeit zerfallenden Atomkerne.

Poisson-Verteilung

x ist die Anzahl von Ereignissen in einer bestimmten Zeit oder in einem bestimmten Volumen, wobei ein bestimmter Mittelwert solcher Ereignisse erwartet werden kann.

Die Ereignisse müssen zufällig und unabhängig voneinander sein.

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad wobei \;\; x = 0, 1, 2, 3, \ldots..$$

Herleitung der Poisson-Verteilung ist auf mehrere Arten möglich:

Zunächst Erklärung des einzigen Parameters μ .

Poisson-Verteilung

Wie groß ist der Mittelwert (Erwartungswert)?

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Der erste Term der Summe ist Null.

Der Faktor x/x! kann durch 1/(x-1)! ersetzt werden.

$$\bar{x} = \mu e^{-\mu} \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}}_{1+\mu+\frac{\mu^2}{2!}+\frac{\mu^3}{3!}+....= e^{\mu}} = \mu$$

Das heißt der Parameter μ , der die Poisson-Verteilung charakterisiert,

ist gleich der mittleren Anzahl der gezählten Ereignisse, die erwartet wird, wenn wir das Zählexperiment viele Male wiederholen.

Poisson-Verteilung

Wie groß ist die Standardabweichung ?

Zunächst Berechnung der Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right) \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\underbrace{-\sum_{x=0}^{\infty} 2\,x\,\mu \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}}_{-2\mu^2}$$

$$\underbrace{+\sum_{x=0}^{\infty} \mu^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}}_{+\mu^2}$$

Poisson-Verteilung

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

ersetzen von x^2 mit (x (x - 1) + x), führt zu

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(x(x-1) + x\right)\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\,(x-1)\mu^x e^{-\mu}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\mu^x e^{-\mu}}{x!} - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\,(x-1)\mu^x\, e^{-\mu}}{x!} + \mu - \mu^2$$

$$= \mu^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}\, e^{-\mu}}{(x-2)!} + \mu - \mu^2$$

Ersetzen von x-2 durch ν, summieren von ν=0
ergibt für die Summe den Wert eins und damit wird:

$$\sigma_\mu^{\;2} = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

$$\sigma_\mu = \sqrt{\mu}$$

Poisson-Verteilung

$$\sigma_\mu = \sqrt{\mu}$$

Die Standardabweichung ist somit gleich der Wurzel aus dem Mittelwert.

Der Fehler des Mittelwertes ist gegeben durch:

$$\sigma_{\overline{\mu}} = \frac{\sigma_\mu}{\sqrt{n}}$$

wobei *n* die Anzahl der Messungen ist,

die wir verwendet haben um den Mittelwert zu bestimmen.

Der relative Fehler der Poisson-Verteilung ist somit:

$$\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{n}\mu} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}\mu} = \frac{1}{\sqrt{n\mu}}$$

Die Poisson-Verteilung

Beispiel: An einer Kreuzung finden pro Woche zwei Verkehrsunfälle statt.
Die Häufigkeit der Verkehrsunfälle wird durch eine Poissonverteilung mit $\mu = 2$ beschrieben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Woche kein Unfall stattfindet ?

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0.135335$$

Die Poisson-Verteilung

Beispiel: An einer Kreuzung finden pro Woche zwei Verkehrsunfälle statt.
Die Häufigkeit der Verkehrsunfälle wird durch eine Poissonverteilung mit $\mu = 2$ beschrieben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als vier Verkehrsunfälle in zwei Wochen stattfinden ?

$$\mathbf{P(\leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = 0.4335}$$

$$P(0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = 0.018316$$

$$P(1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0.073264$$

$$P(2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 0.146528$$

$$P(3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0.195367$$

Ähnliche Fragen sind z. B. wie viele Kinder werden pro Tag in einem Krankenhaus geboren ?

(Jahreszeitliche Schwankungen) !!.

Liegt tatsächlich eine Poissonverteilung vor ?

Qualitativer graphischer Vergleich

Quantitativ mittels χ^2-Test

Poissonverteilung

Übungsaufgabe zur Poissonverteilung:

Wir zählen die Anzahl von Ereignissen pro Zeiteinheit Δt.

Wir führen eine Messung n = 84 mal durch

Wir erhalten als Mittelwert 2.119

Die Standardabweichung ist 1.456

Der Fehler des Mittelwertes ist 0.16

$$\mu = 2.12 \pm 0.16$$

Poissonverteilung

Annahme wir wären zu faul gewesen

und hätten bei der gleichen Messung die Apparatur 84 Δt laufen lassen

Wir hätten nur eine Messung durchgeführt.

Der *Mittelwert* wäre 178 Ereignisse.

Die Standardabweichung 13.34.

Der Standardfehler somit 13.

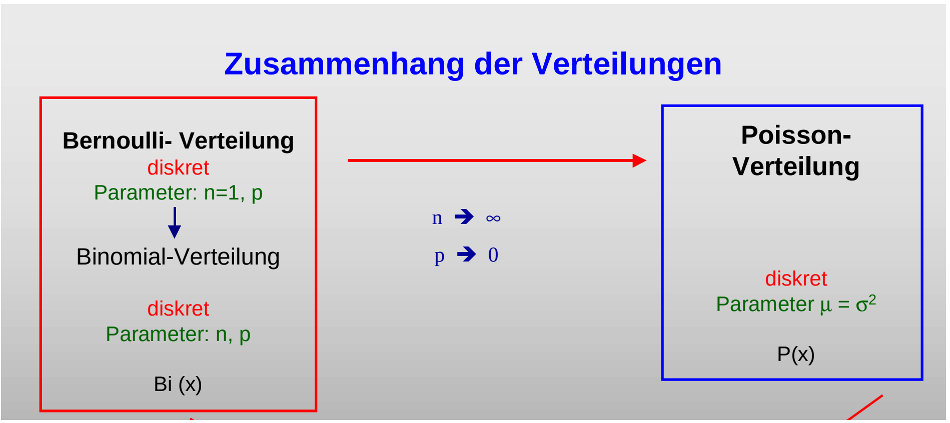
Das Endergebnis:

$$\mu = 178 \pm 13$$

$$\mu = 2.12 \pm 0.16$$

Poisson-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung



$$Bi(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

"Grenzfall seltener Ereignisse"
Anwendung auf radioaktiven Zerfall

In einer radioaktiven Probe seien sehr viele (n) Teilchen vorhanden,

die mit einer äußerst geringen Wahrscheinlichkeit p zerfallen,

(z.B. unter Aussendung eines - Quants).

Wir registrieren die Anzahl der emittierten - Quanten

in einem bestimmten Zeitintervall t.

Wir messen sehr viele Zeitintervalle i und erhalten Anzahlen von Ereignissen m.

Der Erwartungswert (Mittelwert) ist = n p.

Grenzübergang zu n ➔ ∞

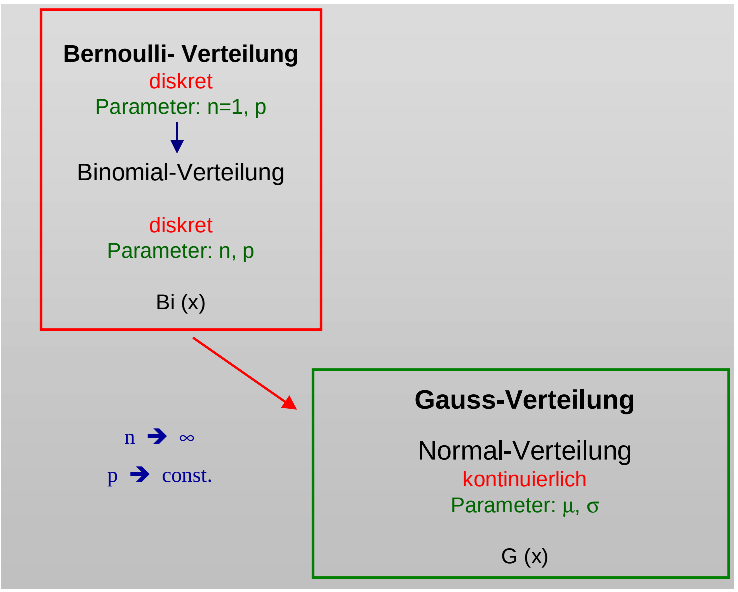
Poisson-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung

$$
\begin{aligned}
Bi(m) &= \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \binom{n}{m} \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} \\
&= \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^m \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{n^m} \frac{\mu^m}{m!} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-m} \\
&= \frac{\mu^m}{m!} \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \\
&= \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} \quad \text{für} \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

Normal-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung



Wir machen eine Messung

Die Messwerte x_m setzen sich aus einer großen Zahl

von kleinen Elementarfehlern β zusammen,

die um den wahren Wert (Mittelwert) μ verteilt sind.

Die Elementarfehler treten n mal auf,

m mal positiv und n-m mal negativ.

Der Fehler f_m setzt sich somit zusammen aus (p = 1/2):

$$f_m = m\,\beta - (n-m)\,\beta \quad = \quad 2\,m\,\beta - n\,\beta$$

$$[m = n/2 \; + \; f_m / 2\,\beta]$$

Normal-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler m mal positiv und n-m mal negativ auftritt wird durch die Binomial-Verteilung gegeben:

$$P_m = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = \binom{n}{m} \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{m!(n-m)!2^n}$$

Die Verteilung ist treppenförmig

Lassen wir β immer kleiner werden und n immer größer, dann wird die Anzahl der Stufen immer größer, die Kurve immer "glatter".

Versuch, eine Funktion zu finden, die den Verlauf beschreibt.

Normal-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{P_m - P_{m+1}}{f_m - f_{m+1}} \qquad P_m = \binom{n}{m}\frac{1}{2^n} \quad und \quad P_{m+1} = \binom{n}{m+1}\frac{1}{2^n}$$

$$P_{m+1} = \frac{n-m}{m+1} P_m \quad sowie \quad f_m - f_{m+1} = -2\beta$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{n - 2m - 1}{m+1} \cdot \frac{P_m}{2\beta}$$

Die Rechnung soll durchgeführt werden für Fehler,
die klein sind gegen den maximalen Fehler, also

$f_m \ll n\beta$ und $m \gg 1$.

[$m = n/2 + f_m / 2\beta$]

Normal-Verteilung

Zusammenhang zur Binomial-Verteilung

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{n-2m-1}{m+1} \cdot \frac{P_m}{2\beta}$$

[m = n/2 + f_m / 2 β]

n - 2 m – 1 ≈ n - 2 m = - f_m/ β

und der Nenner

m + 1 ≈ m = n/2 + f_m/2 β ≈ n/2

$$\frac{\Delta P}{\Delta f} \approx -\frac{P_m f_m}{n\beta^2} = -\frac{Pf}{n\beta^2} = \frac{dP}{df}$$

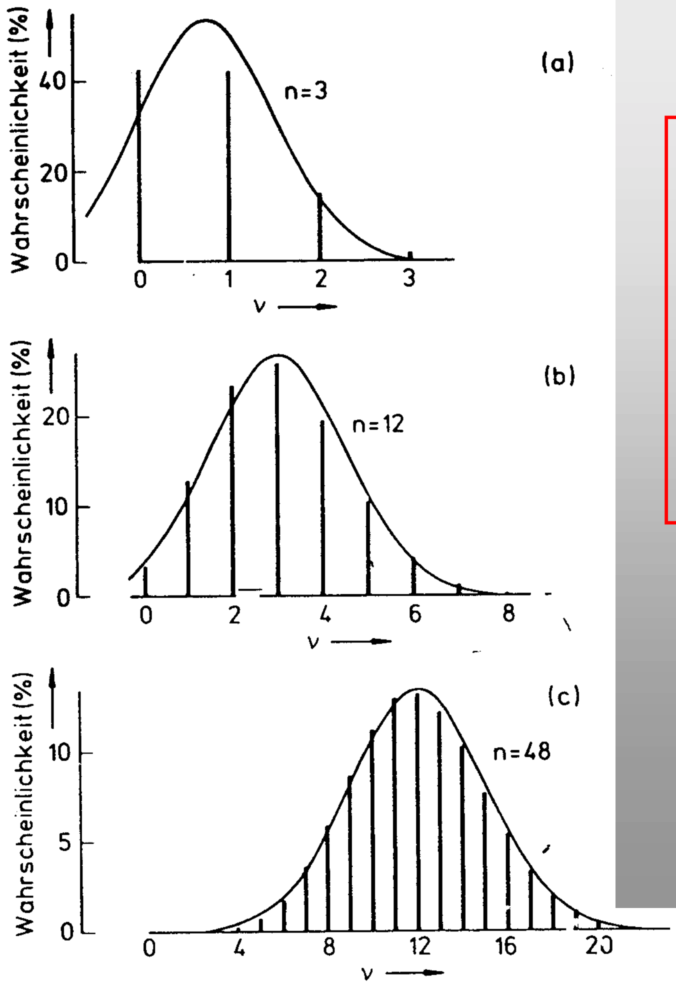
Abkürzung : n β ^{2} = σ^2

$$\frac{dP}{df} = -\frac{Pf}{\sigma^2} \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot f \cdot df \longrightarrow \ln P = -\frac{1}{2\sigma^2} x^2 + const$$

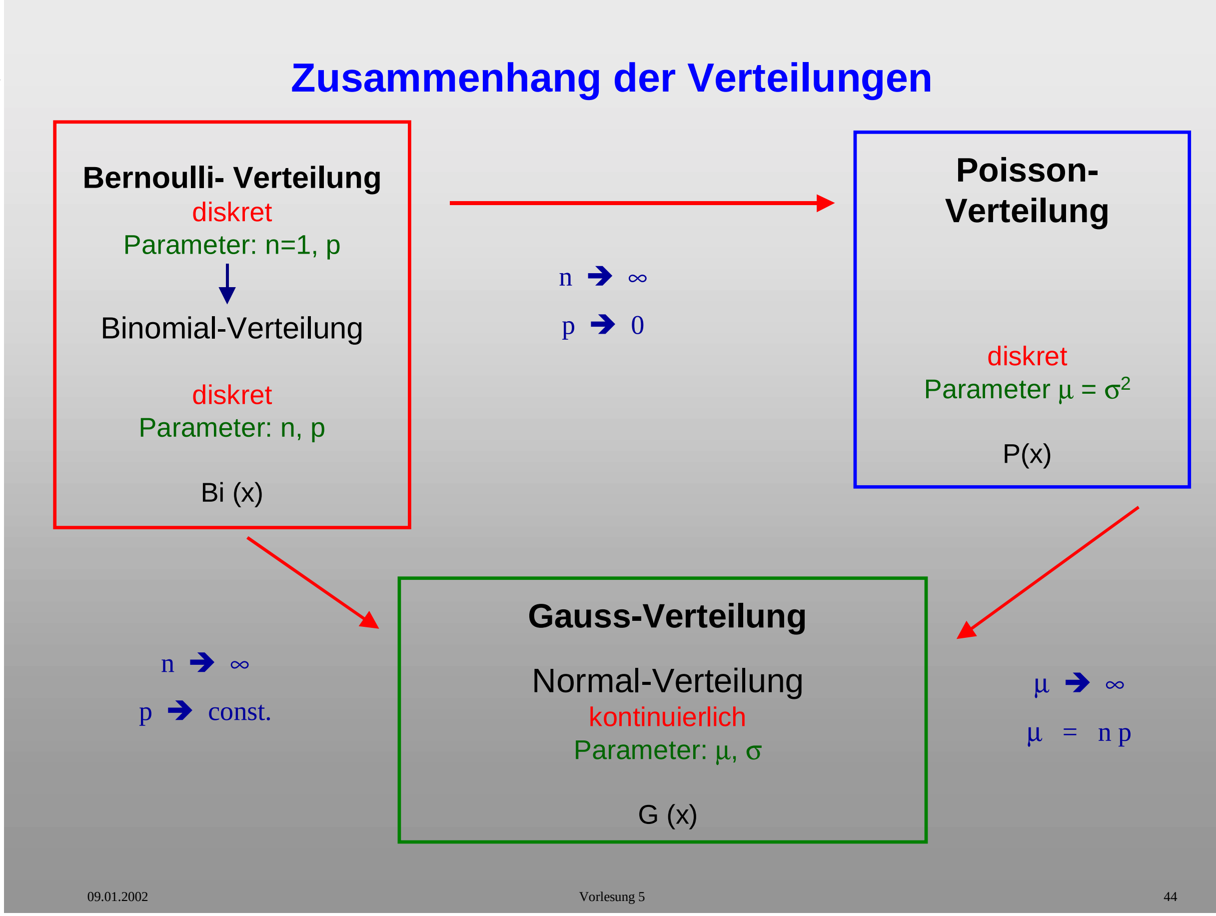
$$\boxed{P = d \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad d = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}$$

Biomialverteilung

Zusammenhang zur Normal-Verteilung

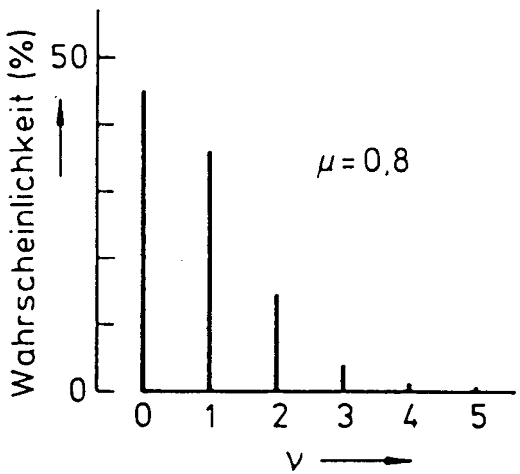


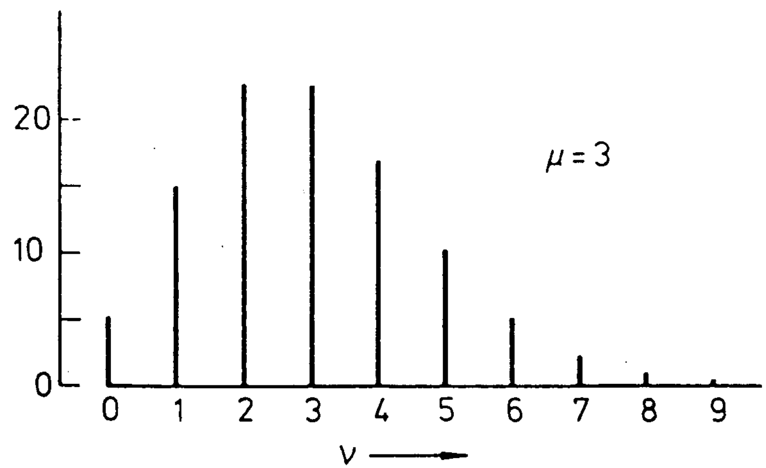
Die Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{4}$ und $n = 3$, 12 und 48.

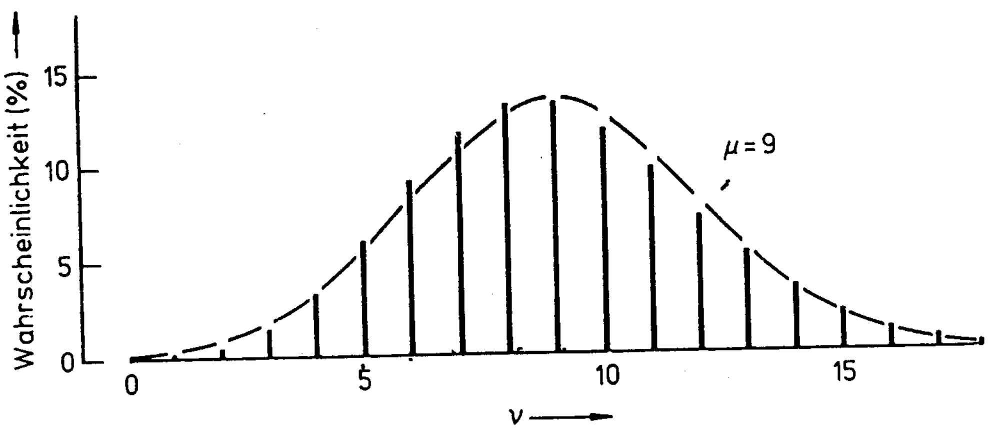


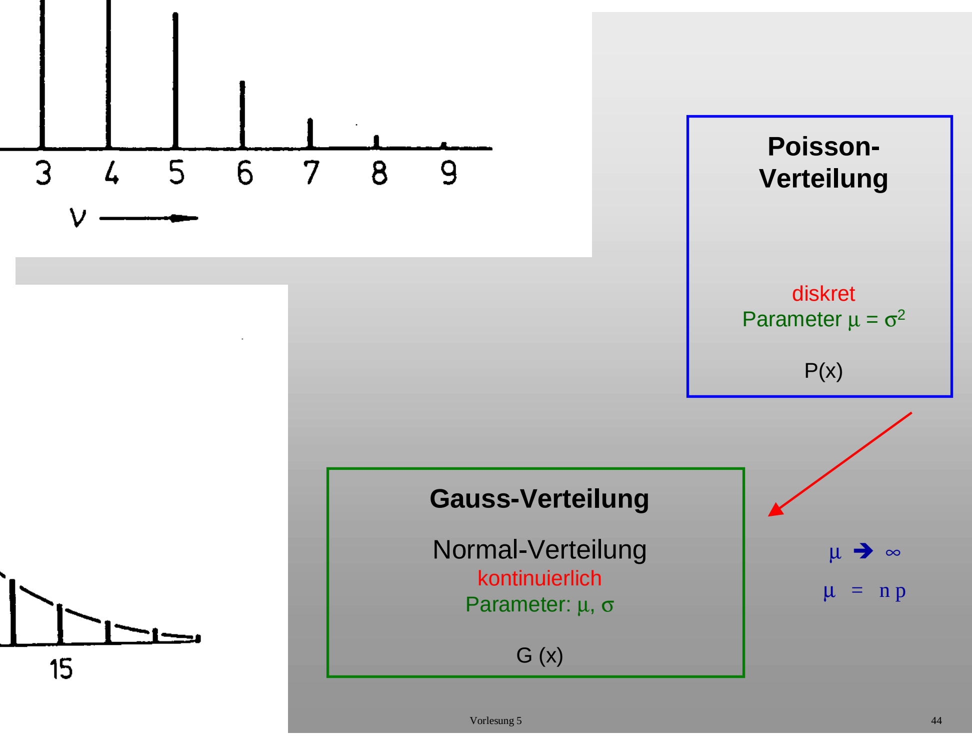
Poissonverteilung

Zusammenhang zur Normal-Verteilung

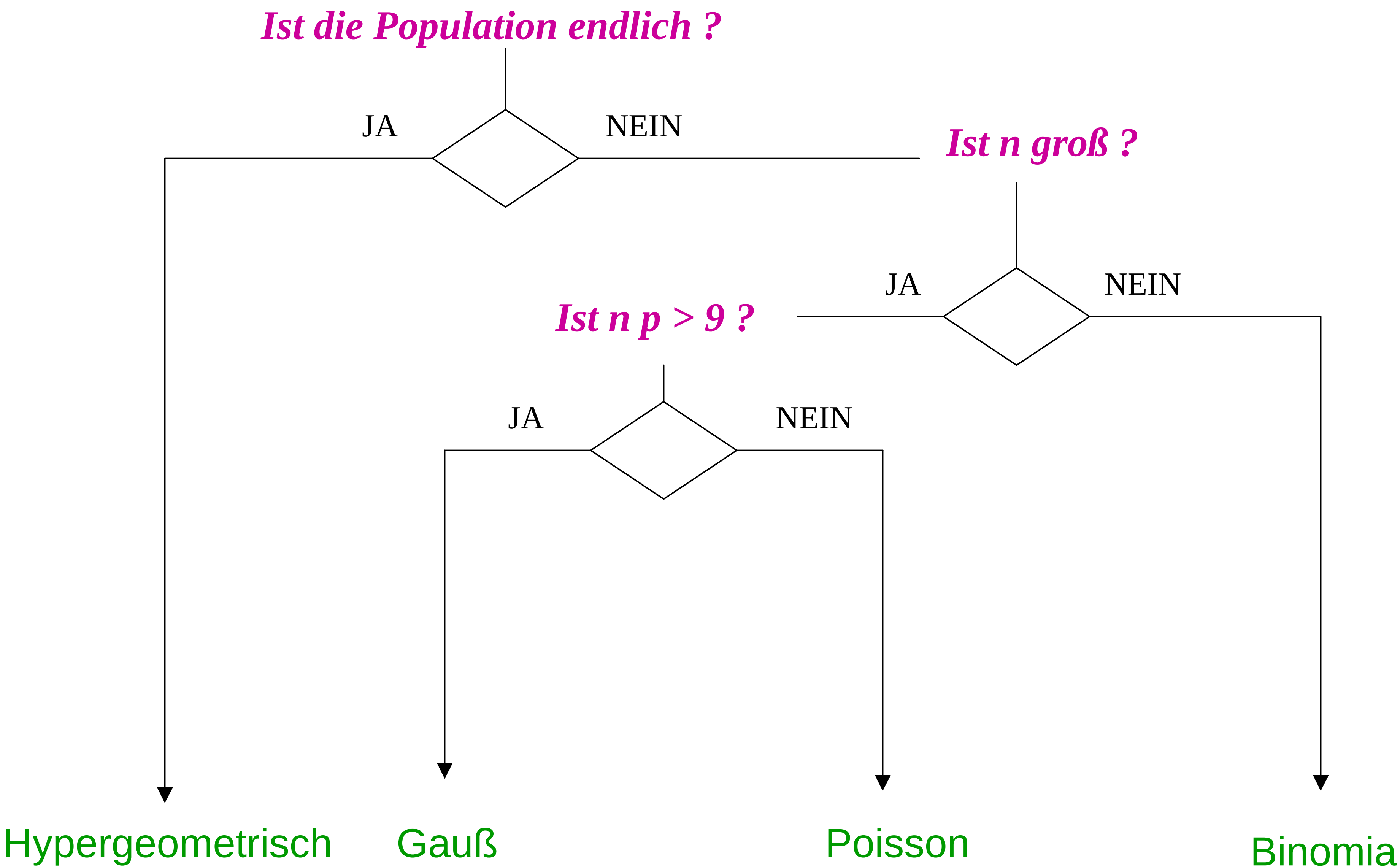








Zusammenhang der Verteilungen



Anwendung der Binomialverteilung bei der Qualitätssicherung

Urnenmodell mit Zurücklegen

Wir haben die Aufgabe eine Lieferung zu testen.

Die Lieferung besteht aus N Teilen von denen M fehlerhaft sind.

Die Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Ziehen ein fehlerhaftes Teil zu ziehen ist:

$$p = M/N$$

(Fehlerquote)

Wir testen insgesamt n Teile und fragen,

wie wahrscheinlich ist es, dass die n Teile keinen Fehler aufweisen?

Anwendung der Binomialverteilung bei der Qualitätssicherung

Wir testen insgesamt n Teile und fragen,

wie wahrscheinlich ist es, dass die n Teile keinen Fehler aufweisen?

Binomialverteilung

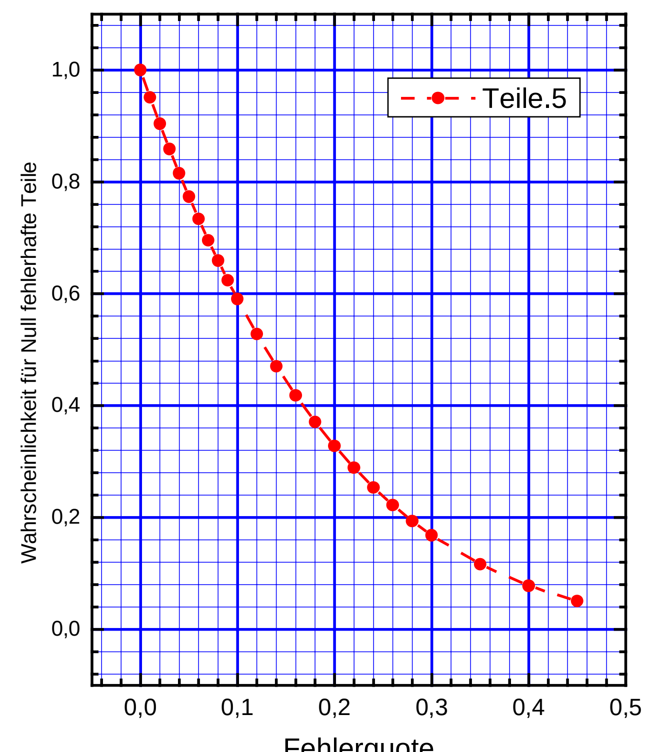
$$W(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

m = 0 (Kein fehlerhaftes Teil)

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = 1, \text{ wenn } m = 0$$

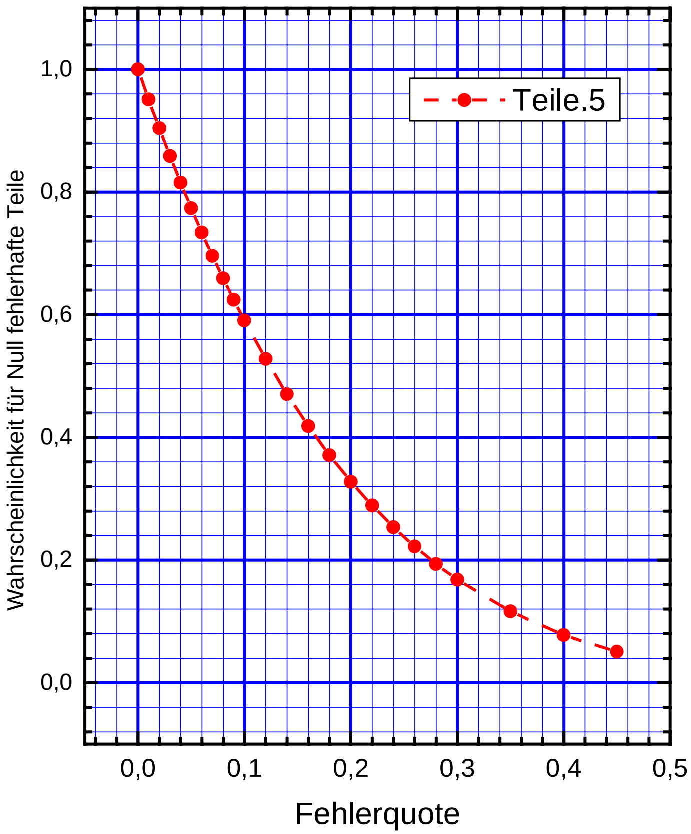
$$W(m) = (1-p)^n$$

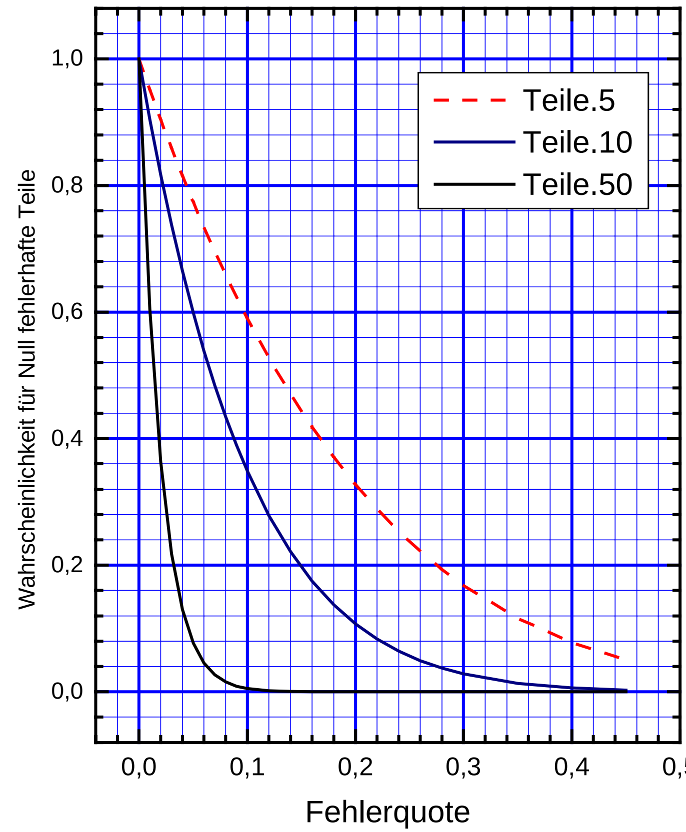
Beispiel n = 5



Anwendung der Binomialverteilung bei der Qualitätssicherung

Erhöhung der Teilchenzahl n führt zu sicherer Entscheidung





Kostenfaktor?