

**Ein Praktikumsversuch
zum Thema:
'Chaos in einfachen
physikalischen Systemen'**

Eine Zulassungsarbeit
zum ersten Staatsexamen

angefertigt von
Stephan Lück

am
Lehrstuhl für Experimentalphysik II
an der
Universität Bayreuth

Tag der Einreichung: 30.3.1995

Gutachter: Prof. Dr. J. Parisi

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Thema und Motivation	3
1.2	Grundlagen der nichtlinearen Dynamik	4
1.2.1	Kausalität und Determinismus	4
1.2.2	Eigenschaften von chaotischem Verhalten	7
1.2.3	Wege ins Chaos	10
1.2.4	Experimentelle Untersuchungsmethoden	12
1.3	Konzept des Praktikumsversuches	15
2	Das invertierte Pendel	17
2.1	Theoretische Beschreibung	17
2.1.1	Herleitung der Bewegungsgleichung	18
2.1.2	Schwache Nichtlinearität	19
2.1.3	Starke Nichtlinearität	20
2.2	Experimentelle Realisation	22
2.3	Ergebnisse	25
2.3.1	Schwache Nichtlinearität	25
2.3.2	Starke Nichtlinearität	26
3	Der Shinriki-Oszillator	31
3.1	Funktionsweise und Theorie	32
3.2	Numerische Simulation	36
3.3	Experimentelle Realisation	37
3.4	Ergebnisse	38
4	Der Praktikumsversuch	47
4.1	Zur Versuchsanleitung und Praktikumsvorbereitung	47
4.2	Ablauf des Versuchstages	48
4.3	Zur Auswertung	48
4.4	Resumé	48

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema und Motivation

Daß bereits einfache (physikalische) Systeme, wie z.B. ein Pendel, unvorhersehbares bzw. chaotisches Verhalten zeigen können, fasziniert seit einigen Jahren viele Wissenschaftler aus unterschiedlichsten Fachrichtungen. Das Auftreten solcher komplexen Bewegungen wird in der Theorie der nichtlinearen Dynamik behandelt. Die nichtlineare Dynamik ist ein aktueller Forschungsbereich in der Physik, mit dem sich immer mehr Physiker beschäftigen. Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und sagen: beschäftigen müssen. Denn die nichtlineare Dynamik stellt eine neue Sichtweise (Paradigma) dar, unter der sich physikalische Fragestellungen aus vielen Bereichen der Physik neu, oder sogar erst hiermit, untersuchen lassen. Als Beispiele seien hier das alte Problem der Stabilität des Sonnensystems, spontane Strukturbildungen in der Natur sowie auch Turbulenzphänomene (z.B. in der Atmosphäre) genannt. Daraus ergibt sich, daß praktisch jeder angehende Physiker eine gewisse Grundkenntnis der nichtlinearen Dynamik haben sollte. Aus diesem Grund ist es nicht nur sinnvoll, sondern fast schon notwendig, daß die Grundlagen der nichtlinearen Dynamik während des Studiums vermittelt werden. Neben Vorlesung und Seminar bietet sich hierzu vor allem ein ausgewählter Versuch im Fortgeschrittenenpraktikum an. Hier können einige der in der nichtlinearen Dynamik auftretenden Phänomene an einfachen Modellsystemen direkt beobachtet werden, was das Verständnis der Grundfragen der nichtlinearen Dynamik erleichtert. Wichtig ist, daß es sich dabei um relativ einfach zu durchschauende Modellsysteme, wie etwa ein getriebenes mechanisches Pendel, handelt. So bleiben die eigentlichen Phänomene der nichtlinearen Dynamik nicht unter einem komplexen Versuchsaufbau verborgen. Die Festlegung der während des Praktikumsversuchs zu vermittelnden Inhalte, der Aufbau des Versuchs sowie die Erstellung der Praktikumsanleitung sind Gegenstand dieser Arbeit.

Der nächste Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die grundlegenden Phänomene der nichtlinearen Dynamik sowie deren Analysemethoden. Dieser bildet dann die inhaltliche Grundlage für die Gestaltung des Praktikumsversuches.

1.2 Grundlagen der nichtlinearen Dynamik

1.2.1 Kausalität und Determinismus

Schon immer ist es das Ziel der Naturwissenschaften und insbesondere der Physik gewesen, aus der Vergangenheit eines Naturphänomens heraus Vorhersagen über dessen zukünftiges Verhalten zu machen. Solche Voraussagen sind dadurch möglich geworden, daß für viele physikalische Sachverhalte klare Gesetzmäßigkeiten gefunden wurden. Die Physiker haben im Laufe der Zeit abstrakte mathematische Modelle der Natur geschaffen, die mit immer größerer Präzision und Zuverlässigkeit Fragen an die Zukunft beantworten können. Die wesentliche Grundlage dieser Modellbildung ist, daß sich die Natur immer an eine Grundregel zu halten scheint: die *Kausalität*, die Verknüpfung von Ursache und Wirkung (auch *Determinismus* genannt). Alles was geschieht, läßt sich auf Ursachen zurückführen. Umgekehrt bestimmen die Ursachen ihre Wirkungen (s. Abbildung 1.1). Kurz gesagt:

gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen

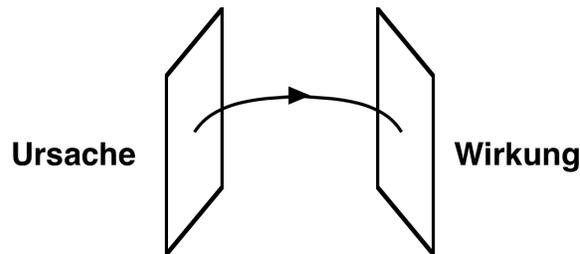


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Kausalitätsprinzips.

Unter den Physikern galt es daher lange Zeit als unzweifelhaft, daß sich alle physikalischen Vorgänge zumindest prinzipiell mathematisch so erfassen lassen, daß langfristige Vorhersagen möglich seien. Dieser Determinismus fand seine Formulierung im 18. Jahrhundert durch LAPLACE. Gäbe es ein intelligentes Wesen (den *Laplace'schen Dämon*), das in der Lage wäre, zu einem bestimmten Zeitpunkt Ort und Impuls aller Teilchen sowie die wirkenden Kräfte zu kennen, so könnte es prinzipiell alle künftigen Konstellationen daraus berechnen.

Aber dies allein reicht noch nicht aus, um die Natur zu verstehen und ihr ihre Gesetze zu entlocken. Denn es ist nicht möglich, immer exakt dieselben Voraussetzungen, z.B. für ein Experiment, zu schaffen, um eine gewünschte Wirkung zu erhalten. Die Erfolge bei der Berechenbarkeit physikalischer Systeme haben vielmehr die Überzeugung aufkommen lassen, daß ein wesentlich stärkeres Prinzip gelten muß:

ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen

Die Reproduzierbarkeit einer Messung ist die wesentliche Grundlage der physikalischen Erkenntnisgewinnung. Sie beruht auf diesem Prinzip der **starken** Kausalität, denn exakt gleiche Bedingungen sind niemals zu realisieren, da schon die Kontrolle der Anfangsbedingungen nur mit einem gewissen Fehler stattfinden kann. Die Fehler des Meßergebnisses sollten, um eine Gesetzmäßigkeit überhaupt angeben zu können, immer aus den Ungenauigkeiten der experimentellen Bedingungen abschätzbar sein, sie sollten ihnen 'ähnlich' sein.

Gegen Ende des letzten Jahrhunderts stieß der französische Mathematiker H. POINCARÉ auf die Tatsache, daß es in der klassischen Mechanik Bewegungen gibt, bei denen kleinste

Änderungen in der Startbedingung den Bewegungsablauf radikal verändern, also das Prinzip der starken Kausalität verletzen. Doch diese Erkenntnis wurde von den Physikern lange Zeit als Kuriosität angesehen. Selbst als E. LORENZ in den 60'er Jahren entdeckte, daß schon bei seinem stark vereinfachten Modell von Luftströmungen in der Atmosphäre unvorhersehbares Verhalten auftreten kann, dauerte es noch einige Jahre, bis sich die Erkenntnis durchzusetzen begann, daß Systeme existieren, die nur dem Prinzip der schwachen Kausalität gehorchen. Solche Systeme, bei denen das Prinzip der starken Kausalität verletzt wird und damit die langfristige Vorhersagbarkeit verlorengeht, nennt man *chaotisch*.

Der Unterschied von regulären und chaotischen Bewegungen ist also nicht nur quantitativer Natur. Sondern zwischen ihnen besteht vielmehr ein qualitativer, grundsätzlicher Unterschied, nämlich der Unterschied zwischen dem Prinzip der starken bzw. der schwachen Kausalität [1] (s. Abbildung 1.2).

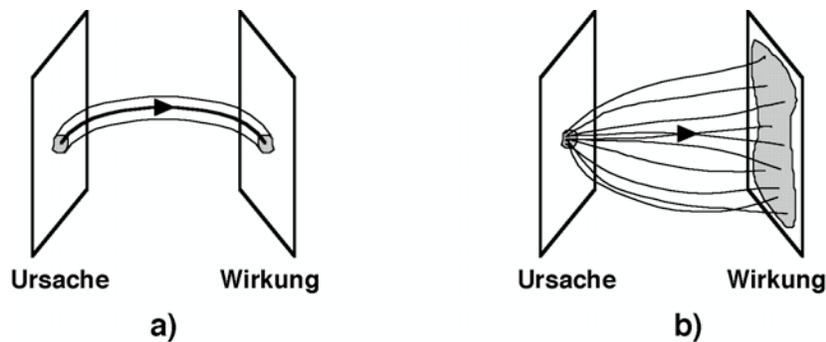


Abbildung 1.2: Unterschied zwischen dem Prinzip der starken a) und der schwachen Kausalität b).

Dynamisches System, Phasenraum, Phasenfluss, Trajektorie

Mathematischer Ausdruck des Determinismus ist die Formulierung eines physikalischen Sachverhaltes anhand von Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.1)$$

bzw. einem Satz von zeitdiskreten Differenzgleichungen.¹

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.2)$$

Man nennt dies in beiden Fällen ein *dynamisches System*. Der n -dimensionale Vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ beschreibt den *Zustand* des Systems zum Zeitpunkt t . Ist nun ein Zustand $\mathbf{x}(t)$ gegeben, so folgen daraus über die zugrunde liegenden Gleichungen eindeutig alle nachfolgenden, sowie auch alle vorausgegangenen Zustände. Das System ist vollständig determiniert. Durch eine spezielle Lösung von (1.1) bzw. (1.2) wird also einem Anfangszustand \mathbf{x}_0 und einem Zeitpunkt t eindeutig ein Zustand $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ zugeordnet. Die Abbildung $\mathbf{f}^t \equiv \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$, die **jedem** Anfangszustand einen neuen Zustand zur Zeit t zuordnet, wird *Phasenfluß* (oder kurz: *Fluß*) genannt.

¹Solch ein Satz von Differenzgleichungen kann einerseits durch das (physikalische) System gegeben sein oder auch aus einer Diskretisierung von Differentialgleichungen gewonnen werden (z.B. Poincaré-Schnitt s.u.).

Betrachtet man nun die Entwicklung des Systems ausgehend von einem Anfangszustand \mathbf{x}_0 im Laufe der Zeit, so erhält man eine Lösungskurve $\{\mathbf{f}^t \mathbf{x}_0\}_t$, die auch *Bahnkurve*, *Orbit*, *Phasenbahn* oder *Trajektorie* des Flusses \mathbf{f}^t zur Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 genannt wird. Die dazugehörige Abbildung $\mathbf{f}^t \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ heißt *Bewegung* des Punktes \mathbf{x} unter der Wirkung des Flusses \mathbf{f}^t .

Obwohl es im allgemeinen unmöglich ist, den Phasenfluß \mathbf{f}^t explizit auszurechnen, und damit (1.1) bzw. (1.2) zu lösen, sind doch gewisse (auch globale) Aussagen über die Bewegung des Systems möglich [2]. Da die beiden Experimente des Praktikums durch 3-dimensionale Differentialgleichungen beschrieben werden können, werden im folgenden nur kontinuierliche Systeme gemäß (1.1) in drei Dimensionen betrachtet. Die folgenden Aussagen und Definitionen gelten jedoch analog auch für höhere Dimensionen und für den diskreten Fall (1.2).

Dissipation, transiente und stationäre Bewegung, Attraktor, Einzugsgebiet

Durch Gleichung (1.1) wird im Phasenraum ein Vektorfeld \mathbf{F} definiert, das als Geschwindigkeitsfeld des Phasenflusses interpretiert wird. Da die Divergenz von \mathbf{F} die Rate bestimmt, mit der sich ein Volumenelement (unter der Wirkung des Flusses) ändert, bleibt im Falle von $\text{div} \mathbf{F} = 0$ ein Volumen U im Phasenraum konstant (Satz von Liouville). In einem solchen dynamischen System gilt die Energieerhaltung. Man nennt es ein *konservatives* System.

Zieht sich dagegen ein Volumen U des Phasenraumes im zeitlichen Mittel zusammen, so spricht man von einem *dissipativen* dynamischen System. Dies ist der Fall, wenn z.B. für alle Punkte \mathbf{x} des Phasenraumes im Zeitmittel gilt: $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$. Beispielsweise ist ein System immer dissipativ, wenn irgendeine Form von Reibung vorliegt ist. Da in den meisten realen Systemen, wie auch in den hier vorgestellten Experimenten, Reibung vorhanden ist, wird im weiteren nur noch auf die dissipativen dynamischen Systeme eingegangen.²

In dissipativen Systemen verlaufen die Trajektorien nach einer gewissen Einlaufphase in einem begrenzten Bereich im Phasenraum.³ Diese Teilmenge des Phasenraumes nennt man einen *Attraktor*. Die Bewegung in der Einlaufphase (z.B. Einschwingen beim Pendel) wird auch als *transiente* Bewegung bezeichnet, während die Bewegung auf dem Attraktor *permanent* oder *posttransient* genannt wird.

Da sich zwei Trajektorien niemals schneiden dürfen, was eine direkte Folge aus der Kausalität ist, existieren in zweidimensionalen Phasenräumen nur zwei verschiedene Arten von Attraktoren, der *stabile Fixpunkt* und der *Grenzzyklus* (s. Abb. 1.3).



Abbildung 1.3: Darstellung der im zwei-dimensionalen Phasenraum möglichen Attraktoren: a) der Fixpunkt und b) der Grenzzyklus.

²Es gibt natürlich auch konservative Systeme, die chaotisches Verhalten zeigen, wie z.B. das berühmte Doppelpendel. Jedoch müssen diese etwas anders behandelt werden. (siehe z.B. KAM-Theorem)

³Dabei kann es vorkommen, daß sich die Bewegung nur beliebig nahe an diesen Bereich annähert.

Im Dreidimensionalen erhält man als weiteren regulären Attraktortyp den *Ring- oder Torusattraktor* hinzu (s. Abb. 1.4a). Eine Bewegung auf einem Torus kann durch eine Überlagerung zweier Kreisbewegungen beschrieben werden. Dabei können die beiden Umlaufzeiten in einem rationalen bzw. in einem irrationalen Verhältnis stehen. Man spricht dann von einer periodischen bzw. einer *quasiperiodischen* Bewegung. Desweiteren gibt es ab drei Phasenraumdimensionen einen weiteren Attraktortyp, den man aufgrund seiner merkwürdigen Eigenschaften *seltamen* Attraktor nennt (s. Abb. 1.4b). Wie unten genauer begründet wird, besitzt ein solcher seltsamer Attraktor eine sehr komplexe, unendlich feine Struktur. Die Bewegung verläuft hier mit einer starken Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, das Prinzip der starken Kausalität ist also verletzt.



Abbildung 1.4: *Phasenraumdarstellung weiterer Attraktoren in drei Dimensionen: a) der Torusattraktor und b) der seltsame Attraktor.*

Es gibt einige allgemeine Eigenschaften, die sich direkt aus der Definition des Attraktors ergeben und die folglich jeder Attraktor besitzen muß. Dies sind:

- a) Ein Attraktor ist eine kompakte Menge im Phasenraum.
- b) Ein Attraktor ist invariant unter der Wirkung des Flußes.
- c) Das (verallgemeinerte) Volumen (bzgl. der Phasenraumdimension n) eines Attraktors ist Null (Folge der Dissipation, s.o.).
- d) Eine beliebige Obermenge des Attraktors schrumpft unter Wirkung des Flusses auf den Attraktor selbst zusammen.

Es ist möglich, daß in einem System mehrere Attraktoren nebeneinander existieren. Zu jedem Attraktor gehört dann ein bestimmter Teil des Phasenraumes, der unter der Wirkung des Flußes auf den Attraktor abgebildet wird. Man nennt dieses (nicht immer zusammenhängende) Gebiet den *Einzugsbereich* oder auch das *Bassin* des Attraktors. Die Trennlinie oder Trennfläche (i.a. Hyperfläche) der verschiedenen Einzugsbereiche unterschiedlicher Attraktoren wird *Separatrix* genannt. Ein Beispiel für das Auftreten zweier koexistierender Attraktoren ist der Shinriki-Oszillator im zweiten Versuchsteil.

1.2.2 Eigenschaften von chaotischem Verhalten

Wie schon angedeutet, ist die Sensitivität von den Anfangsbedingungen durch die Verletzung der starken Kausalität die definierende Eigenschaft einer chaotisch verlaufenden Bewegung. Zwei im Phasenraum zunächst eng benachbarte Zustände entfernen sich unter der Wirkung des Flußes exponentiell voneinander. Die Stärke des exponentiellen Auseinanderlaufens der

Trajektorien wird durch den *Lyapunov-Exponenten* beschrieben. Hierzu betrachtet man für zwei benachbarte Trajektorien $f^t x_0, f^t x'_0$ die zeitliche Entwicklung ihres Abstandes, der sogenannten *Störung* $\epsilon_t \equiv \| f^t x_0 - f^t x'_0 \|$, über einen längeren Zeitraum. Das exponentielle Wachstum dieser Störung wird durch die Gleichung

$$\epsilon_t \simeq \epsilon_0 e^{\lambda t} \quad (1.3)$$

beschrieben, wobei λ der Lyapunov-Exponent ist.

Ist $\lambda > 0$, so wächst die Störung unter der Flußwirkung, und die Bewegung verläuft chaotisch, während bei $\lambda < 0$ die Trajektorien aufeinander zu laufen. Die Bewegung verläuft dann stabil bzw. regulär. Bei $\lambda = 0$ kann man keine eindeutige Aussage machen. Zu beachten ist dabei noch, daß es sich beim Lyapunov-Exponent um eine globale Größe und damit um einen Mittelwert über den gesamten Attraktor handelt. Weiterhin läßt sich für n -dimensionale dynamische Systeme jeder Raumrichtung genau ein Lyapunov-Exponent zuordnen. Diese werden dann der Größe nach geordnet, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, zum sogenannten *Spektrum der Lyapunov-Exponenten* zusammengefaßt.

Da nun einerseits die Trajektorien bei chaotischem Verhalten exponentiell auseinanderlaufen, aber andererseits die Bewegung in einem begrenzten Bereich des Phasenraumes verläuft (s.o.), muß es einen Mechanismus geben, der diesen Widerspruch aufhebt. Dies geschieht dadurch, daß die Trajektorien immer wieder in einen begrenzten Bereich zurückgefaltet werden. Solche Streck- und Faltvorgänge können in gewöhnlichen linearen dynamischen Systemen nicht auftreten, sondern sie setzen Nichtlinearitäten voraus. Damit ein System also überhaupt chaotisches Verhalten zeigen kann, müssen Nichtlinearitäten vorhanden sein. Dies soll hier kurz am Beispiel der einfachsten nichtlinearen Funktion, einer quadratischen Funktion, der sogenannten *Verhulst-Funktion* oder *logistischen Abbildung*, verdeutlicht werden.

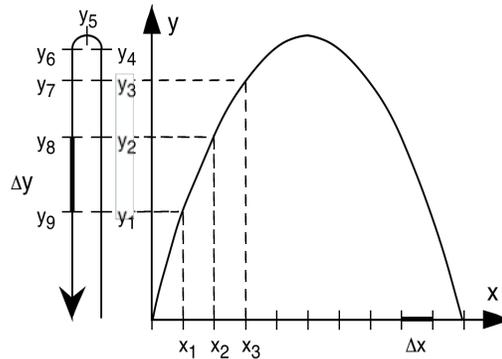


Abbildung 1.5: Verdeutlichung der Streck- und Faltungvorgänge anhand der Verhulst Funktion (nach [3]).

Der Graph der Verhulst-Funktion

$$f_r(x) = rx(1 - x) \quad (1.4)$$

ist eine nach unten geöffnete Parabel. Ist nun der Betrag der Steigung größer als 1, so wird das Intervall gedehnt:

$$\Delta y = |f_r(x_2) - f_r(x_1)| > |x_2 - x_1| = \Delta x \quad (1.5)$$

Gleichzeitig findet eine Faltung statt, sodaß zum Beispiel die Intervalle Δx_1 und Δx_2 auf das Intervall Δy abgebildet werden (s. Abb. 1.5). Dadurch wird die gesamte Wertemenge trotz der (lokalen) Streckung nicht größer als die Definitionsmenge. Das Falten bewirkt außerdem, daß benachbarte Funktionswerte von weit auseinanderliegenden Argumenten stammen können. Die Nichtlinearität ist also entscheidend für die Streck- und Faltvorgänge. Sie ist deshalb auch notwendig (wenn auch nicht hinreichend) für chaotisches Verhalten. Durch das häufige Auftreten von Nichtlinearitäten in der Natur sind daher Systeme, die chaotisches Verhalten zeigen können, eher die Regel denn die Ausnahme.

Durch das ständige Zurückfalten der Trajektorien entstehen im Attraktor immer feiner ineinander liegende Strukturen. Man kann nun immerfort einen Bereich aus diesem vielschichtigen, an einen Blätterteig erinnernden Attraktor herausvergrößern und erhält jeweils wieder ähnliche Strukturen. Man sagt: ein chaotischer Attraktor ist *selbstähnlich*.

Aus der Mathematik sind solche selbstähnlichen geometrischen Objekte bekannt. Sie haben eine weitere 'seltsame' Eigenschaft. Ihre Dimension ist nicht ganzzahlig, sie ist gebrochen. Daher werden diese Objekte als *Fraktale* bezeichnet. Auch der Attraktor einer chaotischen Bewegung ist ein Fraktal. Im dreidimensionalen Phasenraum kann man sich die Notwendig-

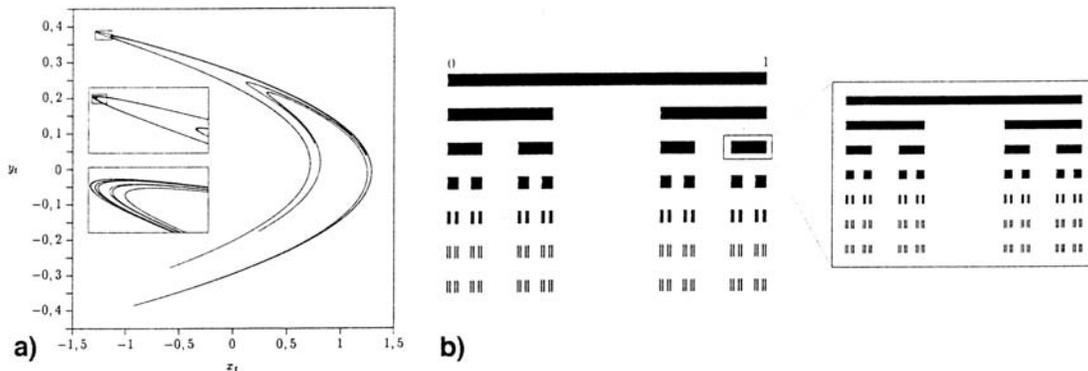


Abbildung 1.6: a) Phasenraumportrait des Henon-Attraktors mit Ausschnittvergrößerungen. b) Beispiel eines einfachen Fraktals: die Cantor 1/3-Menge mit der Dimension $d_{C1/3} = 0.63093\dots$ (aus [2] bzw.[4]).

keit der Fraktalität des Attraktors mit folgender Überlegung klar machen: Wie oben gesagt, bewirkt die Dissipation das Zusammenziehen des Phasenraumes, sodaß das (verallgemeinerte) Volumen eines Attraktors Null ist. Damit gilt für seine Dimension: $d < 3$. Bei einer chaotisch verlaufenden Bewegung entfernen sich zwei Trajektorien exponentiell voneinander. Aus der Tatsache, daß die Bewegung in einem begrenzten Bereich im Phasenraum verläuft und die Trajektorien sich nicht schneiden dürfen (Eindeutigkeit), folgt für die Dimension: $d > 2$. Also ist $2 < d < 3$.

Die fraktale Dimension ist also neben einem positiven Lyapunov-Exponenten eine weitere charakterisierende Eigenschaft eines seltsamen Attraktors, und damit einer chaotischen Bewegung.

1.2.3 Wege ins Chaos

Die Bewegung eines nichtlinearen Systems verläuft nicht in jedem Fall chaotisch. Ob sie nun chaotisch ist oder nicht, hängt von den Werten sogenannter *Kontroll-Parameter* ab. Diese spiegeln bestimmte, von außen zugängliche Bedingungen wieder, die das System, und damit die Bewegung, beeinflussen. Ein Beispiel hierfür ist die Anregungsfrequenz bei einem getriebenen nichtlinearen Pendel. Durch das Verändern eines oder mehrerer dieser Parameter kann man nun das System vom regulären ins chaotische Verhalten überführen. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, wie dieser Übergang stattfinden kann. Die drei wichtigsten Wege ins Chaos sind:

Periodenverdopplungskaskade:

Bei bestimmten Werten eines Parameters verdoppelt sich die Periodendauer des Systems. Dies geschieht unter Variation des Parameters unendlich oft. Eine solche Periodenverdopplung wird auch *Bifurkation* genannt (wobei mit Bifurkation auch andere qualitative Änderungen einer Bewegung bezeichnet werden). Man erhält so Perioden mit der Periodenlänge eins, zwei, vier, acht usw. . Man sagt hierfür kurz z.B. Periode eins. Die Differenzen zwischen den Parameterwerten r_n , bei denen diese Bifurkationen auftreten, werden dabei immer kleiner. Das Verhältnis dieser aufeinanderfolgenden Differenzen

$$\delta_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \quad (1.6)$$

strebt für große n gegen einen festen Wert $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.6692\dots$, die *Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante*. So kann im Experiment über die ersten Bifurkationspunkte die Großmann-Feigenbaum-Konstante näherungsweise bestimmt werden. Dabei hilft die Tatsache, daß diese Folge recht schnell konvergiert, so daß man bereits durch Erfassen der ersten vier Bifurkationsstellen die Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante mit guter Genauigkeit bestimmen kann.

Erhöht man nun den Parameter über einen kritischen Parameterwert r_∞ hinaus, so tritt chaotisches Verhalten auf, das bei bestimmten Parameterwerten durch sogenannte periodische Fenster unterbrochen wird. In diesen Fenstern ist die Bewegung wieder regulär. Beide Experimente, die am Versuchstag durchgeführt werden, zeigen ein solches Bifurkationsszenario bei Variation der jeweiligen Parameter.

Intermittenz:

Hier wird bei Änderung eines Parameters die zunächst reguläre Bewegung immer häufiger durch chaotische Sequenzen unterbrochen, bis, bei einem bestimmten Wert des Parameters, die Bewegung vollständig chaotisch ist. Es sind momentan mindestens 5 verschiedene Intermittenz-Typen bekannt. **Quasiperiodizität:**

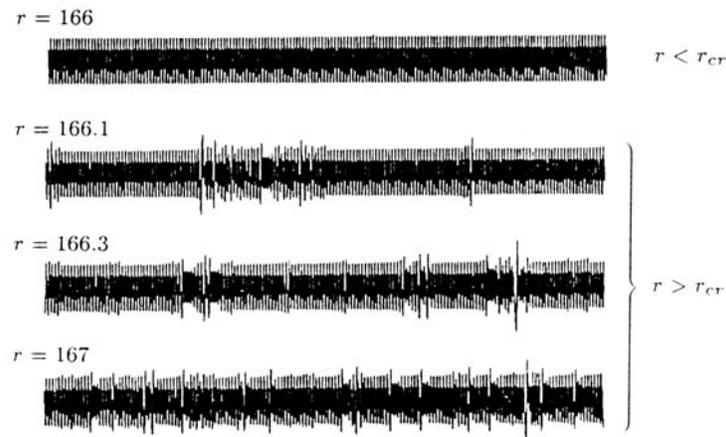


Abbildung 1.7: *Beispiel eines TypI-Intermittenzübergangs: Zeitserie des Lorenz-Systems bei Variation des Kontrollparameters r in der Nähe des kritischen Wertes r_{cr} (aus [5]).*

Der Übergang ins Chaos erfolgt hierbei über das Aufbrechen eines quasiperiodischen Orbits, einer inkommensurablen Bewegung auf einem Ringattraktor, der meist über zwei sogenannte Hopfbifurkationen erreicht wird (s. Abbildung 1.8).

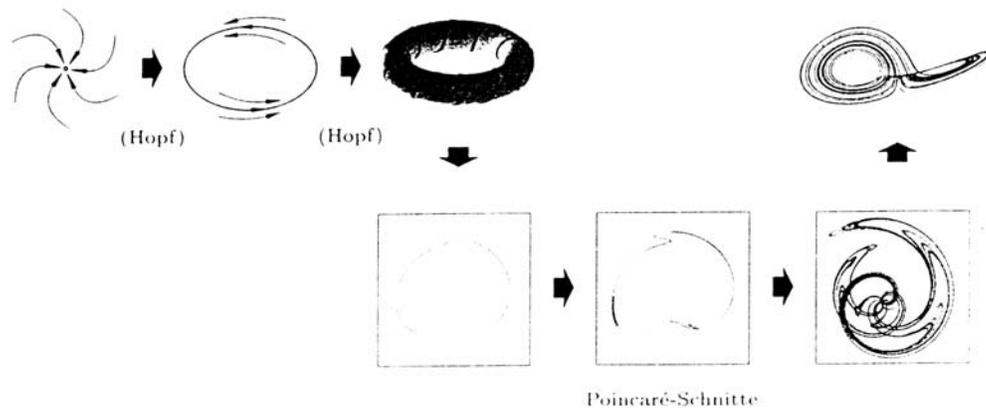


Abbildung 1.8: *Phasenraumdarstellung des quasiperiodischen Übergangs ins Chaos (aus [4]).*

1.2.4 Experimentelle Untersuchungsmethoden

Um eine chaotische Bewegung zu charakterisieren, verwendet man in der nichtlinearen Dynamik u.a. folgende Methoden:

Autokorrelationsfunktion und Fourier-Analyse:

Die Bestimmung der Autokorrelationsfunktion sowie die Fourier-Analyse sind zwei 'klassische' Untersuchungsmethoden von zeitabhängigen Meßgrößen.

Die Autokorrelationsfunktion ist durch

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T (x(t) - \langle x(t) \rangle)(x(t + \tau) - \langle x(t) \rangle) dt}{\int_0^T (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 dt} \quad (1.7)$$

definiert, wobei $x(t)$ die Meßgröße zur Zeit t und τ eine Zeitverschiebung zu t ist. Die Autokorrelationsfunktion gibt also Auskunft über die Ähnlichkeit des zeitlichen Verlaufs einer Meßgröße mit sich selbst, wenn sie um die Zeit τ verschoben wird. Bei vollständiger Übereinstimmung ist die Autokorrelationsfunktion eins, was für eine Korrelationszeit $\tau = 0$ immer der Fall ist (also $C_{xx}(0) = 1$). Eine weitere Eigenschaft ist, daß die Autokorrelationsfunktion eines periodischen Signals ebenfalls wieder periodisch ist. Bei chaotischem Verhalten geht die Autokorrelationsfunktion dagegen für wachsendes τ gegen Null. Die Korrelationszeit, bei der die Autokorrelationsfunktion Null wird, hat hier einen endlichen Wert, wogegen beim stochastischen weißen Rauschen die Autokorrelationsfunktion für $\tau \neq 0$ sofort auf Null absinkt (s. Abbildung 1.9).

Bei der Fourier-Analyse werden für die unterschiedlichen Frequenzen die Leistungsanteile im Zeitsignal bestimmt. Man erhält ein Leistungsspektrum $P(\omega)$, das folgendermaßen definiert ist:

$$P(\omega) := |\hat{x}(\omega)|^2, \text{ mit } \hat{x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Im Leistungsspektrum kann man die Periodenverdopplung sehr gut durch bei der halben Frequenz herauswachsende Maxima erkennen. Bei einer chaotischen Bewegung erhält man einen kontinuierlichen Verlauf des Leistungsspektrums, der im Unterschied zum weißen Rauschen für große Frequenzen abnimmt (s. Abbildung 1.9). Man kann zeigen, daß die Autokorrelationsfunktion $C_{xx}(\tau)$ die Rücktransformierte des Leistungsspektrums ist und das Leistungsspektrum $P(\omega)$ wiederum die Fourier-Transformierte von $C_{xx}(\tau)$ ist [6].

Phasenraumdarstellung und Attraktor-Rekonstruktion:

Die Phasenraumdarstellung gibt einen vollständigen Überblick über den Verlauf der Bewegung. Man erhält sie durch Auftragen je einer Phasenraumvariablen in jeder Raumachse. Eine Schwierigkeit dabei ist, daß bei den meisten Systemen, die in der Natur vorkommen, nicht alle Phasenraumvariablen bekannt bzw. meßbar sind. Es gibt jedoch ein Verfahren, den Attraktor aus den zugänglichen Meßgrößen so zu rekonstruieren, daß alle Informationen über die Bewegung erhalten bleiben. Dazu interpretiert man bei einer festen Zeitspanne Δ die Meßwerte einer Phasenraum-Variablen $\Phi(t), \Phi(t + \Delta), \dots, \Phi(t + (n - 1)\Delta)$ als Koordinaten x_i eines neuen Koordinatensystems. Wenn man die Dimension n und die Verzögerungszeit Δ richtig gewählt hat, so erhält man eine dem tatsächlichen Attraktor äquivalente Darstellung. Diese Methode beruht auf dem *Einbettungstheorem* und wurde von TAKENS mathematisch bewiesen [7].

Ein weiteres Problem bei der Phasenraumdarstellung besteht darin, daß sich der Mensch maximal drei Dimensionen vorstellen kann, viele Systeme jedoch höherdimensional sind. Abhilfe

schafft dabei der

Poincaré-Schnitt:

Beim Poincaré-Schnitt werden nur die Durchstoßpunkte der Trajektorien durch eine Hyperfläche ausgewählt und mit anschließender Projektion in einer Ebene dargestellt. Diese Hyperfläche muß die Trajektorien definitionsgemäß überall transversal schneiden. Eine weitere Bedingung ist, daß nur diejenigen Schnittpunkte berücksichtigt werden, deren zugehörige Trajektorie die Poincaré-Ebene in einer festgelegten Richtung passieren. Man erhält dadurch eine diskrete Abbildung der Bewegung. Desweiteren ist die Dimension der Poincaré-Abbildung um eins geringer als die Dimension des Phasenraums. Diese Abbildung heißt auch Poincaré-Abbildung. Die Erfahrung zeigt, daß bei dieser Reduktion der Dimension keine wesentliche Information über das Langzeitverhalten des Systems verlorengeht ([4] S.65).

Im Experiment nimmt man als Bedingung für die Schnittebene meist die Lage entweder der Maxima oder der Minima einer Meßgröße, und trägt die anderen (evt. durch die Rekonstruktionsmethode gewonnenen) Variablen zu diesen Zeitpunkten gegeneinander auf. Manchmal wird auch direkt eine Ebene gewählt, die den Attraktor in geeigneter Weise schneidet. Man erhält so zum Beispiel bei einem Periode-2 Orbit zwei Punkte in der Poincaré-Ebene, bei Periode-4 dementsprechend vier Punkte usw.

Wiederkehr-Abbildung (Return-Map):

Bei der Wiederkehr-Abbildung wird von einer diskreten Abbildung der aktuelle Meßwert über dem vorangegangenen Meßwert aufgetragen. Falls ein kontinuierliches System (1.1) vorliegt, nimmt man dessen Poincaré-Abbildung für dieses Verfahren. Ähnlich zum Poincaré-Schnitt erhält man hier für periodische Bewegungen zum Beispiel bei einem Periode-2 Orbit zwei Punkte in der Wiederkehrabbildung, bei Periode-4 vier Punkte usw. . Beispiele solcher Wiederkehrabbildungen findet man in Kapitel 3, wo für die verschiedenen Schwingungszustände des Shinriki-Oszillators solche Wiederkehrabbildungen berechnet wurden (s. Abbildungen 3.12 ff).

Bifurkationsdiagramm:

Den Weg der Periodenverdopplung kann man durch ein sogenanntes Bifurkationsdiagramm darstellen. Hierbei betrachtet man die Projektion der Poincaré-Abbildung auf eine Achse unter Veränderung eines Kontrollparameters. Um ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten, trägt man die durch eine solche Projektion erhaltenen Werte (z.B. Schwingungsmaxima) über den jeweiligen Parameterwert auf. In dieser Arbeit wurden Bifurkationsdiagramme von den beiden Experimenten sowohl numerisch bestimmt, wie auch ausgemessen (s. Abbildungen 2.4, 2.10, 3.5 und 3.8).

Wenn mehrere unterschiedliche Parameter existieren, erhält man Informationen über das globale Systemverhalten bei den verschiedenen Parameterkombinationen über das sogenannte

Phasendiagramm:

Beim Phasendiagramm wählt man als Koordinatenachsen zwei (unabhängige) Parameter, die das Systemverhalten beeinflussen. In dieses Koordinatensystem trägt man die Bereiche qualitativ unterschiedlichen Verhaltens (z.B. Periode 1, Periode 2 oder Chaos) ein und erhält so quasi eine 'Landkarte' des Systemverhaltens für die gewählten Parameter. Man kann als Analogie z.B. gebräuchliche Phasendiagramme bei der Charakterisierung der Zusammensetzung von Substanzen betrachten. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein solches Phasendiagramm für den Shinriki-Schwingkreis vermessen (s. spätere Abbildung 3.7).

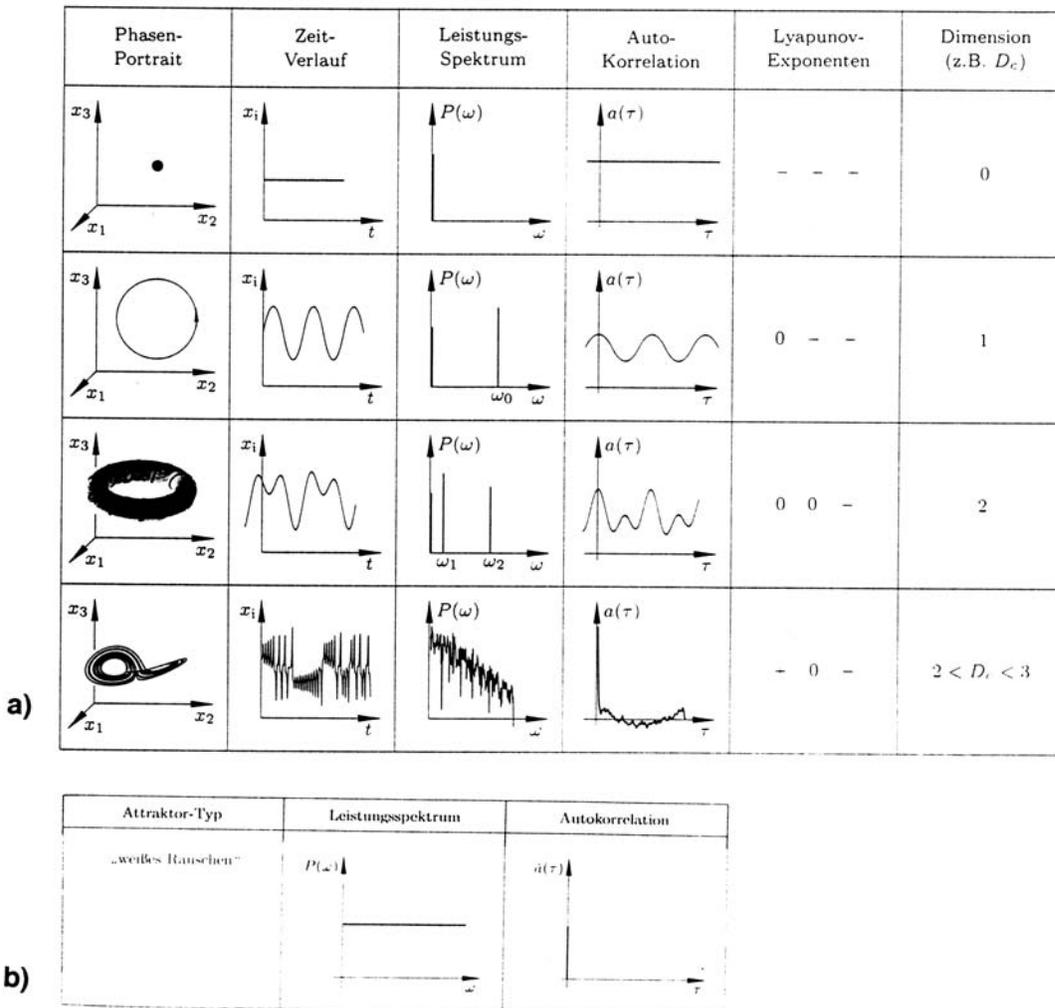


Abbildung 1.9: Überblick über verschiedene Charakterisierungsmöglichkeiten der unterschiedlichen Attraktortypen im 3-dimensionalen Phasenraum a) und zum Vergleich weißes stochastisches Rauschen b) (aus [4]; vgl. experimentelle Realisation [8]).

1.3 Konzept des Praktikumsversuches

Wie man aus dem vorigen Abschnitt erkennt, treten in der nichtlinearen Dynamik recht viele neue Begriffe und auch neuartige Untersuchungsmethoden auf. Diese Begriffe sind jedoch notwendig, um bereits die Grundlagen der nichtlinearen Dynamik zu verstehen, was die Vermittlung der nichtlinearen Dynamik für Studenten erschwert und somit einen etwas anderen Ansatz für das Praktikum nötig macht.

In Gegensatz zu vielen anderen Versuchen des Praktikums steht hier nicht die Messung bestimmter physikalischer Größen oder die Bestätigung eines formalen Zusammenhanges im Vordergrund. Vielmehr wird darauf Wert gelegt, die spezifischen Phänomene der nichtlinearen Dynamik zu beobachten und zu erkennen, diese zu diskutieren und sie als Einstiegsmöglichkeit in eine eventuell später erfolgende Vertiefung zu betrachten. Dieser Grundsatz spiegelt sich im inneren Aufbau des Praktikumsversuches wieder, indem die Aufgabenstellungen nicht allzu starr formuliert wurden. Dieses gibt dem Studenten etwas mehr Freiraum für das selbstständige Entdecken der Phänomene und die eigene Wahl der Meßmethoden. Desweiteren ist der Praktikumsversuch so aufgebaut, daß ohne weiteres zu einem späteren Zeitpunkt andere Schwerpunkte gesetzt werden können oder auch neue Aufgaben zu den Experimenten gestellt werden können, deren Grundlagen in dieser Arbeit angesprochen sind.

Der Praktikumsversuch setzt sich aus einem mechanischen sowie einem elektronischen Experiment zusammen. Da ein mechanisches Experiment i.a. leichter zu durchschauen ist, steht ein solches am Anfang des Praktikumsversuchs. Dieser erste Versuchsteil beinhaltet die Untersuchung eines periodisch angetriebenen, invertierten Pendels. Das Pendel besteht aus einer Blattfeder, die am unteren Ende fest eingespannt ist und an deren oberen Ende ein Gewicht befestigt werden kann (s. Abbildung 2.1). An diesem Experiment sollen, ausgehend von der Resonanzkurve, Hystereseeffekte bei schwach nichtlinearen Schwingern und das Auftreten verschiedener Schwingungszustände sowie die Verletzung des starken Kausalitätsprinzips bei stark nichtlinearen Schwingungen gezeigt werden. Da für die nähere Untersuchung von chaotischen Systemen, etwa Bifurkationsdiagramm oder Poincaréschnitt, lange Zeitserien benötigt werden und die Eigenfrequenz des Pendels weniger als ein Hertz beträgt, können diese Untersuchungsmethoden in diesem Versuchsteil nicht vermittelt werden. Außerdem würden die Meßzeiten zu lange dauern um im Praktikum stabile Werte zu erhalten und die langen Wartezeiten würden den Praktikumsversuch unattraktiv machen. Aus diesem Grund bietet sich im zweiten Versuchsteil ein elektrischer Oszillator an. Die Wahl fiel dabei auf den Shinriki-Oszillator, der 1981 von Shinriki et al. [15] vorgeschlagen wurde. Dieser Oszillator stellt im Unterschied zum invertierten Pendel ein autonomes physikalisches System dar, an dem sämtliche Phasenraumvariablen direkt gemessen werden können. Es ist z.B. für die Vermittlung des Attraktorbegriffs sehr hilfreich, da so die Darstellung des Attraktors im Phasenraum ohne den Umweg der Rekonstruktion möglich ist. Ein weiterer Grund für die Verwendung des Shinriki-Oszillators ist, daß er mit ca. 800 Hz bei Schwingungsamplituden im Bereich einiger Volt arbeitet, wodurch er recht wenig anfällig gegenüber äußeren Störungen ist. Außerdem ist hierdurch die Messung der Phasenraumvariablen ohne großen (und teuren) apparativen Aufwand möglich.

Für die Untersuchung und die Charakterisierung chaotischer Bewegungen ist aufgrund der komplexen und rechenintensiven Methoden (s. Abschnitt 1.2.4) der Einsatz eines Computers im Praktikum notwendig. Zudem werden in der täglichen Laborpraxis eines (Experimental-) Physikers bei fast allen Experimenten inzwischen Computer eingesetzt. Daher ist es nicht nur notwendig, sondern durchaus sinnvoll, auch im Praktikum Computer einzusetzen. So kann der

Praktikant erste Erfahrungen mit der computererfaßten Meßwertaufnahme und -analyse machen. Die Messungen werden in beiden Versuchsteilen mit einer in einem PC eingebauten 12 Bit Analog-Digital-Wandlerkarte des Typs DAS1602 der Firma Keithley durchgeführt. Diese Meßkarte besitzt eine Summenabtastrate von maximal 100 kHz , sodaß z.B. beim Shinriki-Oszillator für jede der drei Meßgrößen eine Abtastfrequenz von 33 kHz zur Verfügung steht. Die Meßkarte wird über das Labor-Meßprogramm LabVIEW betrieben. Dieses Programm besitzt eine recht intuitive, an reale Laborgeräte erinnernde graphische Benutzeroberfläche. Da in LabVIEW eigene Programme geschrieben werden können, war es möglich, direkt für die einzelnen Versuchsteile angepaßte Meßprogramme zu entwickeln. Dabei wurde auf eine für den Praktikanten, der ja voraussichtlich zum ersten Mal mit LabVIEW arbeitet, leicht zu bedienende Programmoberfläche geachtet. Bei eventuellen Unklarheiten über die einzelnen Bedienungselemente kann der Praktikant eine entsprechende Hilfefunktion aufrufen, die ihn näher über die Funktion des jeweiligen Programmelementes informiert. Mit dieser Vorgehensweise wird die Gefahr der Undurchsichtigkeit bei computergesteuerten Experimenten weitgehend vermieden und das Hauptaugenmerk liegt wieder bei der eigentlichen physikalischen Fragestellung, nämlich der Erkundung der Phänomene der nichtlinearen Dynamik.

Kapitel 2

Das invertierte Pendel

Der erste Teil des Praktikumsversuches besteht aus der Untersuchung des getriebenen invertierten Pendels. Durch das veränderbare Gewicht am oberen Ende einer unten eingespannten elastischen Blattfeder erhält man einen nichtlinearen Schwinger, der trotz seines einfachen Aufbaus sehr komplexe Bewegungen ausführen kann.

2.1 Theoretische Beschreibung

Das invertierte Pendel besteht aus einer unten fest eingespannten Blattfeder, die über zwei seitlich angreifende Spiralfedern periodisch angetrieben werden kann. Es können unterschiedliche Zusatzgewichte am oberen Ende der Blattfeder angebracht werden (s. Abbildung 2.1). In der Zeichnung bezeichnet θ den Winkel zwischen der Tangente an der Pendelspitze und dem Lot, M die Masse des Zusatzgewichts und L die Entfernung zwischen der Basis der Blatt-

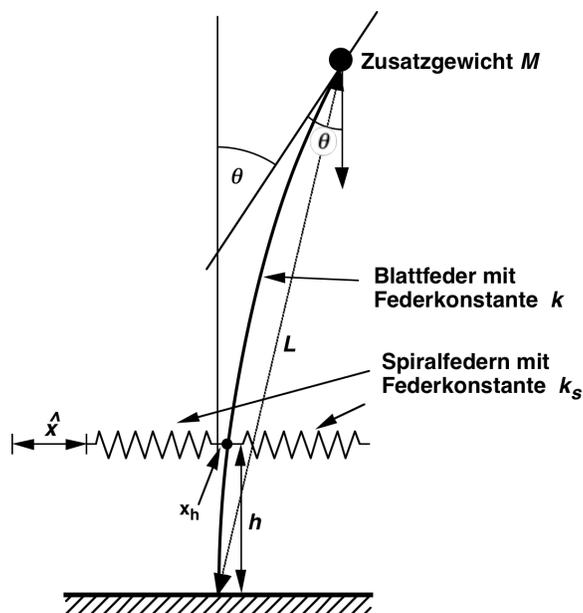


Abbildung 2.1: Skizze des invertierten Pendels

feder und dem Schwerpunkt des Gewichts. Durch die verschiedenen Zusatzgewichte können die Schwingungen des Pendels für den linearen Fall ohne Zusatzgewicht, den schwach nichtlinearen Fall mit kleinem Zusatzgewicht sowie den stark nichtlinearen Fall mit hohem Zusatzgewicht untersucht werden.

2.1.1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung benötigt man die wirkenden Drehmomente. Diese sind (mit den Bezeichnungen aus Abbildung 2.1):

- Trägheitsmoment des Pendels: $-ML(\theta)^2\ddot{\theta}$
- Dämpfungsmoment: $-2c\dot{\theta}$
- Rückstellmoment der Blattfeder: $-k\theta$
- Gewichtsmoment des Zusatzgewichts: $MgL(\theta)\sin\theta$
- Angreifendes Moment der Spiralfedern: $hk_s x_h + \hat{x}\cos(\omega_a t)$

Hierbei ist c die Dämpfungskonstante und g die Erdbeschleunigung. Die Bewegungsgleichung des invertierten Pendels lautet damit:

$$ML(\theta)^2 \frac{d^2\theta}{dt} + 2c \frac{d\theta}{dt} + k\theta + hk_s x_h - MgL(\theta)\sin(\theta) = k_s h \hat{x} \cos(\omega_a t). \quad (2.1)$$

Es ist zu beachten, daß L als Abstand vom Befestigungspunkt zur Spitze der Blattfeder eigentlich nicht konstant ist, jedoch mit der Pendellänge L als konstant angenommen wird. Die Auslenkung x_h der Blattfeder in Höhe der Spiralfedern wird im folgenden als vernachlässigbar klein angesehen, was lediglich eine geringe Verformung des Potentials zur Folge hat. Eine weitere Näherung ist, daß der Angriffswinkel der Spiralfedern mit 90° angenommen wird, was durch die geringe Krümmung der Feder bei genügend kleinem h gerechtfertigt wird. Die Bewegungsgleichung des invertierten Pendels lautet somit in genäherter Form

$$ML^2 \frac{d^2\theta}{dt} + 2c \frac{d\theta}{dt} + k\theta - MgL\sin(\theta) = \hat{T}\cos(\omega_a t). \quad (2.2)$$

Unter \hat{T} sei die Amplitude des periodisch angreifenden Drehmoments zusammengefaßt. Bei Näherungen in einem nichtlinearen System ist zu bemerken, daß man bei einer numerischen Lösung der genähernten Differentialgleichung natürlich nicht exakt die Trajektorien des realen Systems erhält. Dieses ist jedoch durch die starke Abhängigkeit der Bewegung von seinen Anfangsbedingungen auch bei exakter Differentialgleichung mit den besten Computern nicht möglich. Das globale Verhalten kann jedoch auch mit der genähernten Differentialgleichung gut beschrieben werden.

Zu den beiden letzten Termen auf der linken Seite der Gleichung (2.2) läßt sich ein Potential angeben.

$$V(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2 + MgL(\cos(\theta) - 1) \quad (2.3)$$

Enwickelt man in (2.3) den Kosinus für kleine Winkel θ , so erhält man das Potential des Duffing-Oszillators:

$$V_{Duff}(\theta) = \frac{1}{2}(k - MgL)\theta^2 + \frac{1}{24}MgL(\theta^4) \quad (2.4)$$

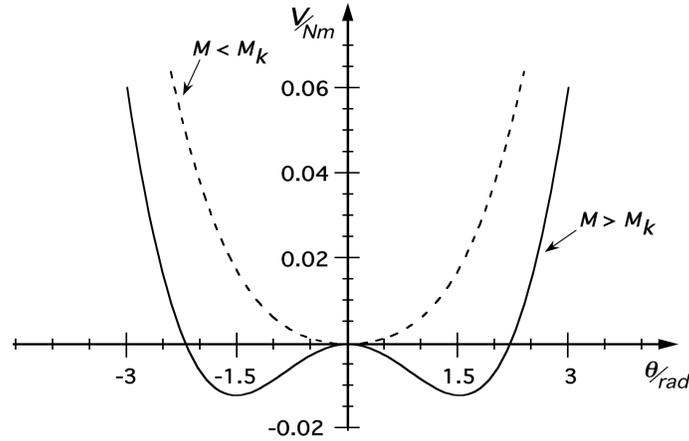


Abbildung 2.2: Darstellung des Potentials V für a) $M = 10 \text{ g} < \frac{k}{gL}$ und b) $M = 20 \text{ g} > \frac{k}{gL}$ mit $k = 0.041 \frac{\text{N}}{\text{rad}}$, $L = 32 \text{ cm}$.

Das hier beschriebene invertierte Pendel ist also ein dem Duffing-Oszillator verwandtes System. Bei einer kritische Masse $M_k = \frac{k}{gL}$ geht das zunächst monostabile Pendel in ein bistabiles System über (s. Abbildung 2.2). Dieser Übergang stellt eine sogenannte *Symmetriebrechung* dar. Die Bewegung des Pendels ist in den beiden Fällen sehr unterschiedlich und muß daher getrennt betrachtet werden.

2.1.2 Schwache Nichtlinearität

Schwache Nichtlinearität bedeutet, daß die Zusatzmasse M kleiner als die kritische Masse $M_k = \frac{k}{gL}$ ist, und das Pendel somit monostabil ist (s. Abbildung 2.2). Bei einem nichtlinearen Oszillator hängt, im Gegensatz zum linearen Oszillator, die Eigenfrequenz ω_r von der Schwingungsamplitude b ab, also $\omega_r(b)$ (s. auch Abbildung 2.8). Umgekehrt ist bei Anregung des Pendels mit unterschiedlichen Frequenzen ω_a die sich einstellende Schwingungsamplitude $b(\omega_a)$ gegenüber der Resonanzkurve des linearen Oszillators in ihrer Form verändert. Sie kann mittels Störungsrechnung und Berücksichtigung der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz ω_r von der Amplitude b durch folgende Überlegung näherungsweise bestimmt werden. Sei die Bewegungsgleichung der Auslenkung $\theta(t)$ um die Gleichgewichtslage durch

$$\ddot{\theta} = -2\delta\dot{\theta} + f(\theta) + f_a \cos(\omega_a t) \quad (2.5)$$

gegeben. δ bezeichnet hierbei die Dämpfung und die Rückstellkraft $f(\theta)$ hat neben dem linearen Anteil einen nichtlinearen Zusatz, $f(\theta) = -\omega_0^2\theta - \gamma\theta^3$, wobei ω_0 die Eigenfrequenz ohne Nichtlinearität, d.h. für $\gamma = 0$, bezeichnet. f_a ist die Anregungsamplitude und ω_a die Anregungsfrequenz. Betrachtet man den Verlauf der Resonanzkurve in der Nähe der Resonanzfrequenz des ungestörten Systems ($\omega_a = \omega_0 + \epsilon$), so erhält man durch kurze Rechnung (s. [9]) eine Gleichung dritter Ordnung für das Quadrat der Schwingungsamplitude,

$$b^2 \left(\left(\epsilon - \frac{3\gamma}{8\omega_0} b^2 \right)^2 + \delta^2 \right) = \frac{f_a^2}{4\omega_0^2}. \quad (2.6)$$

Diese Gleichung hat je nach den Werten der Parameter f_a , γ , ω_0 und δ eine reelle und zwei konjugiert komplexe, oder drei reelle Lösungen $b(\epsilon)$. Für feste f_a , γ und ω_0 , sowie verschiedene Dämpfungen δ_i , ist letzteres Verhalten von $b(\omega_a)$ in Abbildung 2.3.b dargestellt. Ist die Dämpfung hinreichend klein, so gibt es bei gegebener Antriebsfrequenz $\omega_a = \omega_0 + \epsilon$ zwei verschiedene eingeschwungene Zustände, da die dritte (mittlere) Lösung instabil ist (s. Abbildung 2.3.c).

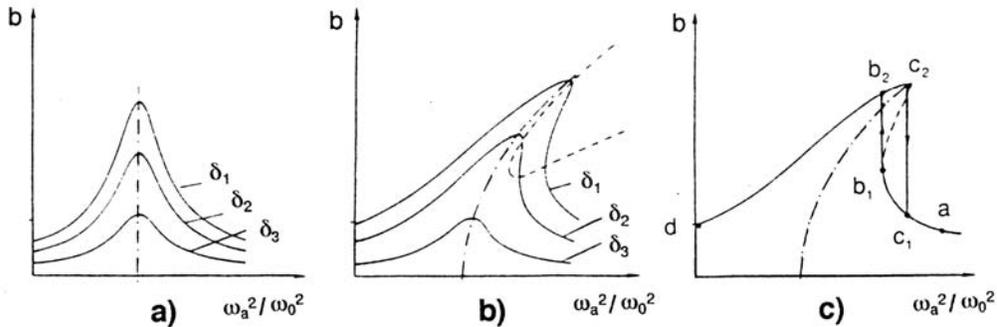


Abbildung 2.3: Resonanzkurven eines Duffing-Oszillators für verschiedene Dämpfungen. a) linearer Fall ($\gamma \rightarrow 0$), b) nichtlinearer Fall, c) Darstellung der Hysterese (aus [10]).

2.1.3 Starke Nichtlinearität

Wird das Gewicht an der Spitze der Blattfeder so groß, daß sich zwei stabile Ruhelagen ergeben (s. Abbildung 2.2.b), so lassen sich bei Anregung dieses stark nichtlinearen Schwingers sehr komplexe Bewegungen beobachten. Verringert man, von großen Frequenzen kommend, langsam die Antriebsfrequenz ω_a , so zeigen sich nach Ende des Einschwingverhaltens nacheinander stationäre subharmonische Schwingungen mit der Periodendauer $T_n = 2^n T_a = 2^n \frac{2\pi}{\omega_a}$. Unterhalb einer kritischen Anregungsfrequenz ω_k verhält sich das Pendel chaotisch. Dieses Verhalten des Pendels wird, wie in Kapitel 1.1 dargestellt, als Bifurkationsszenario bezeichnet. Das Bifurkationsdiagramm des invertierten Pendels wurde durch numerische Integration der Bewegungsgleichung (2.2) des Pendels berechnet und ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Als Integrationsverfahren wurde ein modernes Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung angewendet, das 1981 von Dormand und Price [11] vorgestellt wurde ([12]). Ein Runge-Kutta-Verfahren eignet sich wesentlich besser als das einfache Euler-Verfahren, da hier der folgende Funktionswert unter Berücksichtigung zusätzlicher Stützstellen berechnet wird. Im Bifurkationsdiagramm in Abbildung 2.4 wurde die Frequenz als Parameter von hohen Frequenzen kommend stetig erniedrigt. So ergeben sich dann die Periodenverdopplungen.

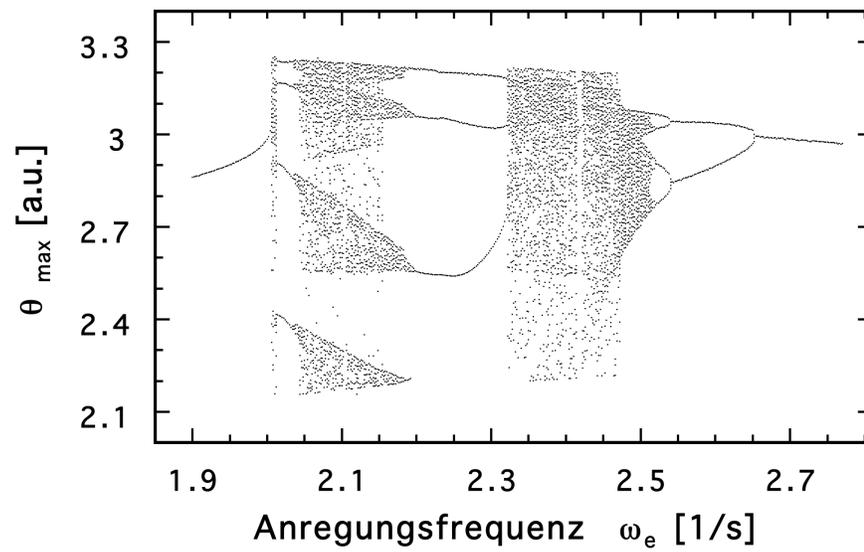


Abbildung 2.4: Berechnetes Bifurkationsdiagramm des invertierten Pendels.

2.2 Experimentelle Realisation

Mechanischer Aufbau:

Das invertierte Pendel besteht aus einer auf einer 5 mm starken Aluminium-Grundplatte befestigten Blattfeder, an deren Spitze eine Halterung für verschiedene Gewichte angebracht ist (s. Abbildung 2.5). Eine genaue Zeichnung der Halterung, sowie auch der anderen Ein-

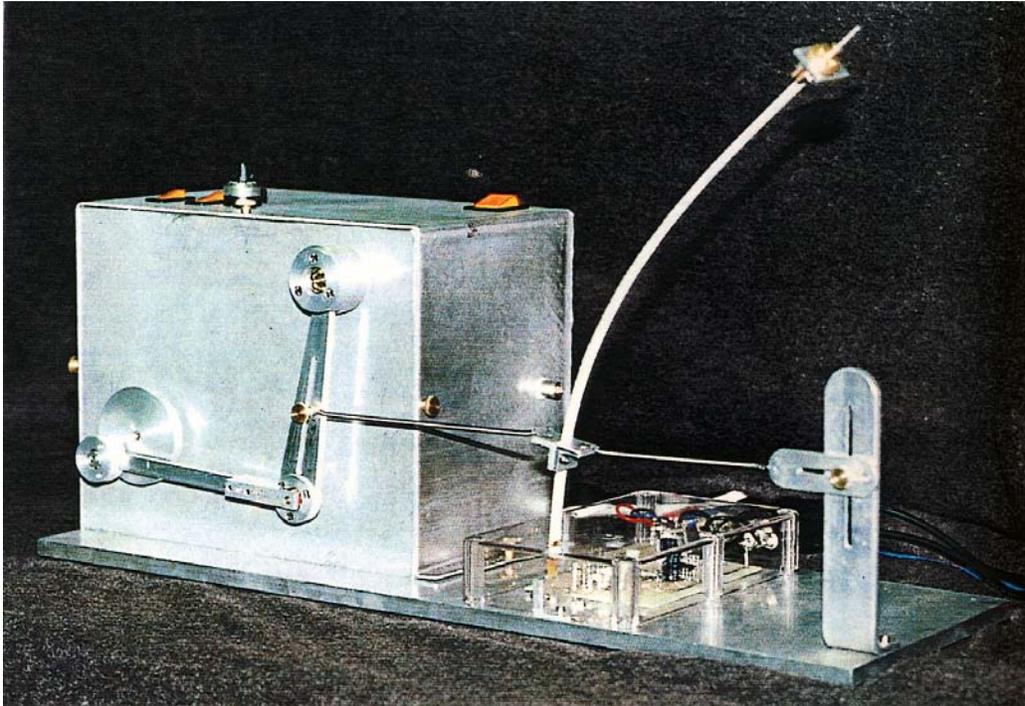


Abbildung 2.5: Foto vom Aufbau des invertierten Pendels.

zelteile befindet sich im Anhang A. Als Blattfedern kamen 1 cm breite und 15 cm bis 40 cm lange Blechstreifen aus einer Messing-Legierung mit höherem Kupferanteil, mit Dicken von 0.3 mm bis 0.8 mm zum Einsatz. Die Blattfeder wird über eine Spiralfeder der Federhärte $k = 0.27 \text{ N/cm}$ von einem Schrittmotor mit 200 Schritten pro Umdrehung, bzw. 400 Schritten pro Umdehung im Halbschrittbetrieb, angetrieben. Die Taktimpulse für den Schrittmotor werden von einer im Computer eingebauten Multifunktionskarte des Typs DAS 1602 der Firma Keithley erzeugt. So sind Umdrehungsfrequenzen bis zu ca. 5 U/s möglich. Die Antriebskraft ist durch das Verändern des Angriffspunktes der Spiralfeder am Übertragungshebel variierbar.

Die Messung der Auslenkung erfolgte über Dehnungsmeßstreifen (DMS), die auf der Blattfeder knapp oberhalb der Befestigung aufgeklebt wurden. DMS haben die Eigenschaft, daß ihr elektrischer Widerstand von ihrer Dehnung abhängt.

Meßschaltung:

Die Widerstandswerte der DMS werden über eine Brückenschaltung mit anschließendem Differenzverstärker gemessen. Um den Rauschpegel zu verringern, wird das vom Differenzverstärker kommende Signal zusätzlich über einen Tiefpaß-Filter geleitet. Die Winkelgeschwindigkeit als zweite Phasenraumvariable erhält man über eine mit Operationsverstärkern aufgebaute Differenzier-Schaltung. Hierbei wurde aufgrund des besseren Signal-Rausch-Verhältnisses eine zweistufige Schaltung gewählt, die zunächst die Eingangsspannung aufintegriert, das so erhaltene Signal dann vom ursprünglichen Signal abzieht und anschließend nachverstärkt. Eine ausführliche Beschreibung der Differenzierschaltung findet man in [13]. Der Stromlaufplan der kompletten Meßschaltung ist in Abbildung 2.6 dargestellt.

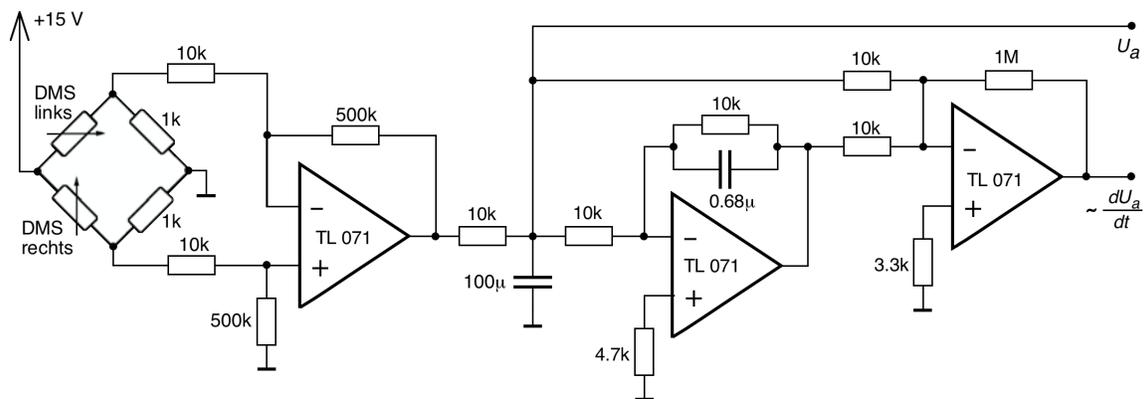


Abbildung 2.6: Meßschaltung der DMS.

Damit die Messung der Auslenkung über die DMS für den Praktikanten möglichst transparent bleibt, wurde diese Schaltung auf einer Platine geometrisch genauso wie auf dem Schaltplan mit oben verlaufenden Leiterbahnen aufgebaut und unter einem durchsichtigen Plexiglasgehäuse neben dem Pendel angebracht (s.a. Foto 2.5).

Für eine absolute Bestimmung des Auslenkwinkels θ aus den mit dieser Meßschaltung erhaltenen Spannungswerten ist eine Eichmessung in Abhängigkeit des tatsächlichen Auslenkwinkels θ notwendig. Die Abbildung 2.7 zeigt das Ergebnis einer solchen Eichmessung mit der auch im weiteren verwendeten Blattfeder der Dicke 0.3 mm und der Länge 32 cm . Die Winkel wurden dabei mit einem Geometriedreieck bestimmt. Wie die Abbildung zeigt, ist die über die Meßschaltung erhaltene Spannung über den ganzen Bereich sehr gut proportional zum manuell gemessenen Auslenkwinkel θ . Die Abweichung ist kleiner als 1% und liegt damit innerhalb der Meßgenauigkeit der manuell bestimmten Auslenkwinkel. Der sich aus der Steigung der Ausgleichsgeraden ergebende Umrechnungsfaktor beträgt $c = 10.38^\circ/V$.

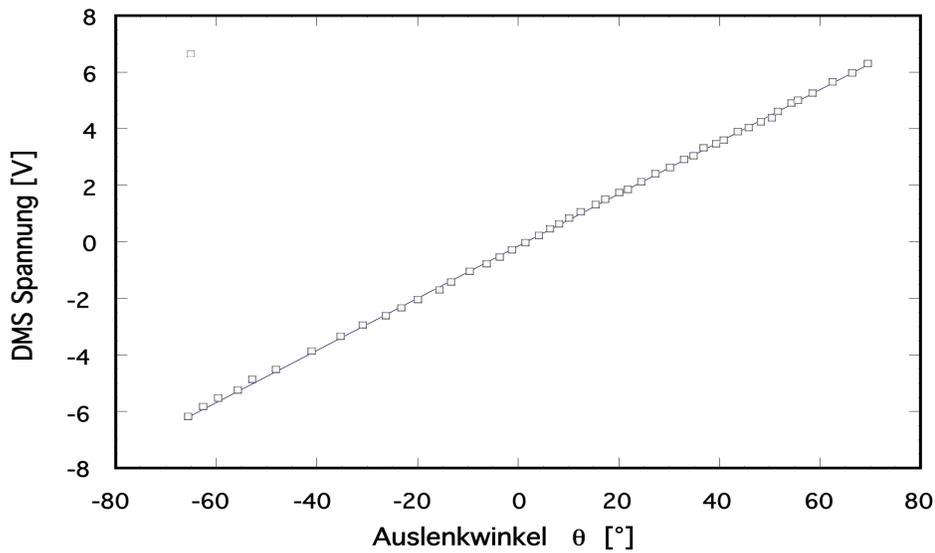


Abbildung 2.7: Abhängigkeit der über die DMS-Meßschaltung gemessenen Spannung von der geometrisch ermittelten Auslenkung.

Dämpfung:

Die Versuche zeigten, daß es notwendig ist, die Dämpfung des Pendels zu erhöhen und wenigstens grob veränderbar zu machen. Einige Effekte, wie z.B. die Periodenverdopplung, waren ohne äußere Dämpfung nur sehr schlecht beobachtbar, da hier der Parameterbereich für die Bifurkationen sehr stark verkleinert ist. Das Pendel ging bei Parameterveränderung von Periode 1 sofort in chaotische Schwingungen über. Die verschiedenen Dämpfungen wurden durch seitliches Aufkleben von unterschiedlichen Klebebändern realisiert. Die folgende Tabelle zeigt die mit dieser Methode erzielten Dämpfungskonstanten.

Material	ohne Klebestreifen	Tesa-Film 1x pro Seite	Isolier-Band 1x pro Seite	Textilband 1x pro Seite	Textilband 2x pro Seite
Dämpfungskonstante c	0.17 1/s	0.20 1/s	0.24 1/s	0.34 1/s	0.43 1/s

Tabelle 2.1: Variation der Dämpfungskonstanten durch Anbringen verschiedener Klebematerialien

2.3 Ergebnisse

Die Versuche ergaben, daß Blattfedern mit einer Länge von etwa 30 cm und einer Dicke von 0.3 mm – 0.5 mm die besten Ergebnisse lieferten. Daher wurden alle im folgenden dargestellten Ergebnisse mit einer 32 cm langen und 0.3 mm dicken Blattfeder durchgeführt.

2.3.1 Schwache Nichtlinearität

Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Schwingungsamplitude:

Bei einem nichtlinearen Pendel ist die Eigenfrequenz, wie oben schon angedeutet, im Unterschied zum linearen Fall von der Schwingungsamplitude abhängig. Dieses sei hier für das schwach nichtlineare Pendel gezeigt. Abbildung 2.8 zeigt die Eigenfrequenz des schwach nichtlinearen Pendels sowie die des linearen Pendels ohne Zusatzgewicht in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude.

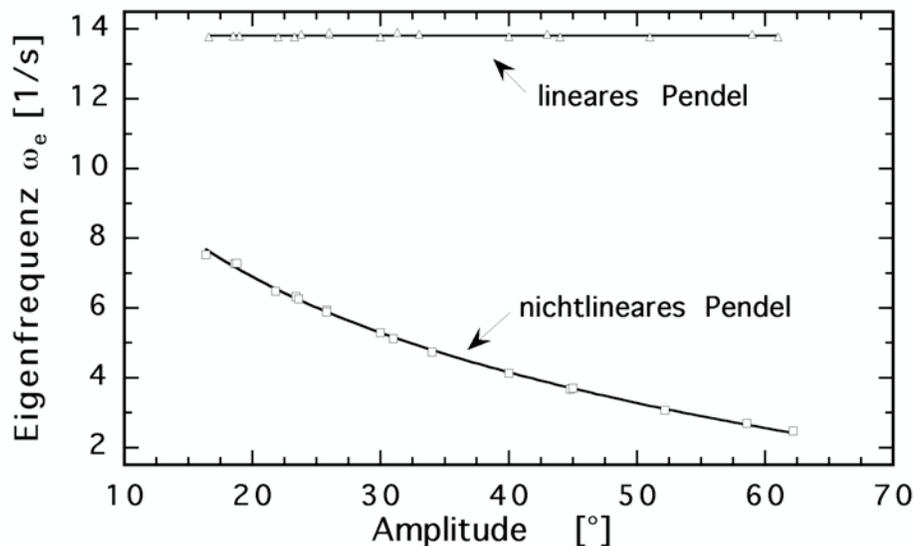


Abbildung 2.8: *Abhängigkeit der Eigenfrequenz des freischwingenden linearen und des schwach nichtlinearen Pendels ($M = 12\text{ g}$) von seiner Schwingungsamplitude.*

Man erkennt, daß die Eigenfrequenz im nichtlinearen Fall stark von der Amplitude der Schwingung abhängt, während dies beim linearen Pendel nicht der Fall ist. Die Anpassung ergibt eine logarithmische Abhängigkeit der Eigenfrequenz ω_e von der Schwingungsamplitude b :

$$\omega_e(b) = m_0 + m_1 \log(b), \quad (2.7)$$

mit $m_0 = 18.7\text{ 1/s}$ und $m_1 = -9.10\text{ 1/s}$. Der relative Fehler beträgt weniger als 1%.

Resonanzkurve:

Schaltet man beim schwach nichtlinearen Pendel die Erregung ein, so kann in der Resonanzkurve eine zum linearen Fall veränderte Form beobachtet werden, die bei genügend geringer Dämpfung zu einer Hysterese führt (s. Abschnitt 2.1.2). Die Abbildung 2.9 zeigt die Resonanzkurven des Pendels mit der Länge 32 cm und der Dicke 0.3 mm für verschieden starke Dämpfungen δ_i .

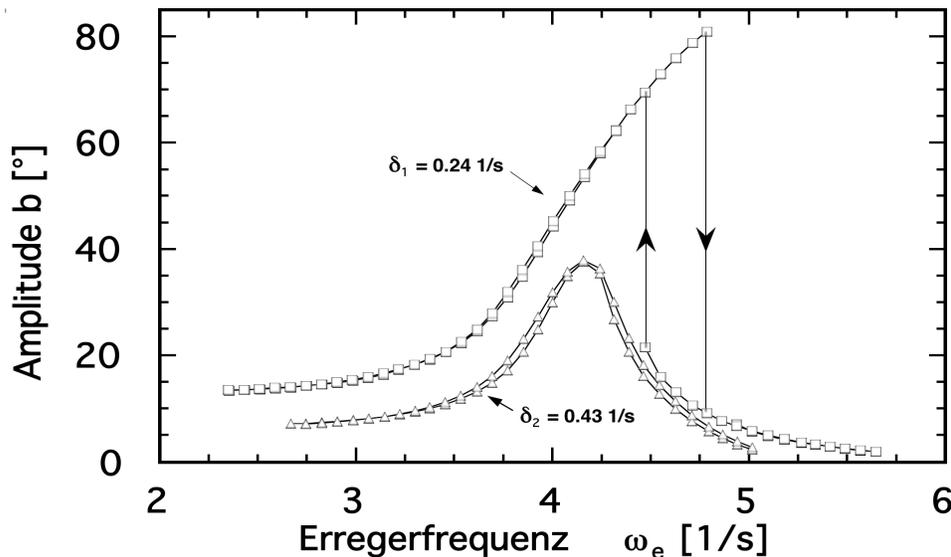


Abbildung 2.9: *Hysterese-Effekt in der Resonanzkurve des getriebenen invertierten Pendels.*

Bei diesem Experiment lag die Angriffshöhe der Spiralfedern h bei 4 cm . Ein Vergleich mit Abbildung 2.3 ergibt eine gute qualitative Übereinstimmung der gemessenen Resonanzkurven mit den dort dargestellten, für den Duffing-Oszillator berechneten, Resonanzkurven.

2.3.2 Starke Nichtlinearität

Erhöht man das Zusatzgewicht über einen kritischen Wert M_k , sodaß das Pendel zwei stabile Ruhelagen besitzt, dann läßt sich ein Periodenverdopplungsszenario beobachten. Für ein Pendel der Länge 32 cm und der Dicke von 0.3 mm wurde ein Bifurkationsdiagramm aufgenommen. Dafür wurde, von hohen Frequenzen kommend, die Anregungsfrequenz kontinuierlich erniedrigt, während dabei für jeden Parameterwert die Schwingungsmaxima bestimmt wurden. Dem Pendel wurde hierbei nach jeder Parameteränderung genügend Zeit zum Einschwingen gegeben. Die übrigen Parameter waren bei dieser Messung: Angriffshöhe $h = 6\text{ cm}$, Erregungsamplitude $\hat{x} = 1\text{ cm}$, Zusatzmasse $M = 20\text{ g}$, Dämpfung $c = 0.43\text{ 1/s}$. Man erkennt im Frequenzbereich von 3 1/s bis 2.72 1/s ein typisches Bifurkationsszenario, das in ein chaotisches Band führt. Daran schließt sich ab etwa 2.63 1/s ein Fenster an, in dem die Bewegung wieder periodisch verläuft. Dieses reguläre Fenster beginnt mit einer inversen Bifurkationskaskade, die nach einem Amplitudensprung anschließend wieder über Bifurkationen in einen chaotischen Bereich führt. Dieser zweite chaotische Bereich endet bei einer Anregungsfrequenz ω_e von 2.35 1/s und mündet in einen stabilen Grenzzyklus. Ein Vergleich mit dem berechneten Bifurkationsdiagramm ergibt eine qualitative Übereinstimmung

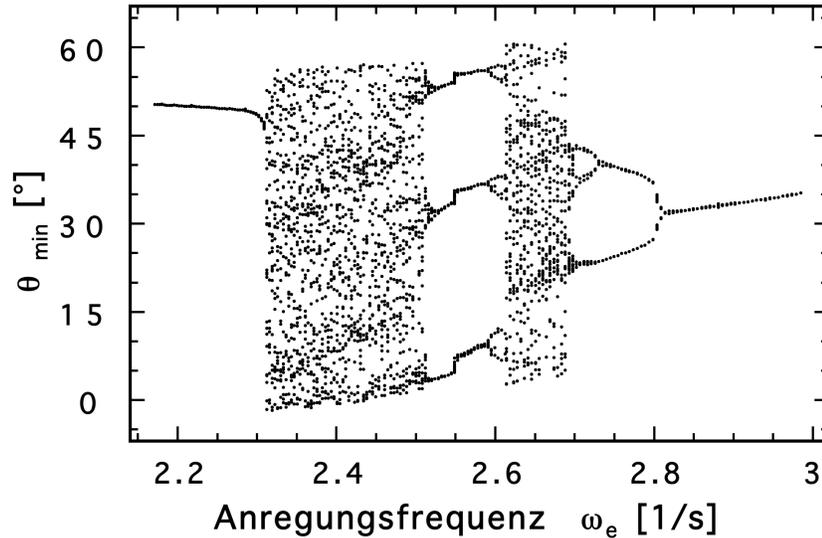


Abbildung 2.10: Gemessenes Bifurkationsdiagramm des invertierten Pendels (Parameterwerte siehe Text).

der Schwingungszustände. Die Abweichungen lassen sich durch die gemachten Näherungen (s. Abschnitt 2.1.1) erklären.

Zum Abschluss dieses Kapitels sind im folgenden die Phasenraumportraits mit dazugehörigen Zeitserien sowie den daraus errechneten Leistungsspektren sämtlicher gefundener, qualitativ unterschiedlicher Schwingungszustände dargestellt. Diese Messungen wurden mit $h = 7 \text{ cm}$, $M = 20 \text{ g}$, $\hat{x} = 1 \text{ cm}$ und einer Dämpfung von $c = 0.43 \text{ 1/s}$ durchgeführt. In den Phasenraumportraits wurde die stabile Ruhelage mit einem '+' und die instabile Gleichgewichtslage im Ursprung mit 'x' gekennzeichnet. Die Phasenraumdarstellungen umfassen jeweils mindestens 10 komplette Umläufe. In den Leistungsspektren wurden die jeweiligen Anregungsfrequenzen durch eine vertikale Linie gekennzeichnet. Hierin erkennt man deutlich die bei höheren Perioden erscheinenden subharmonischen Maxima, sowie im chaotischen Bereich das zu hohen Frequenzen hin abnehmende kontinuierliche Spektrum (vgl. Abb. 1.9).

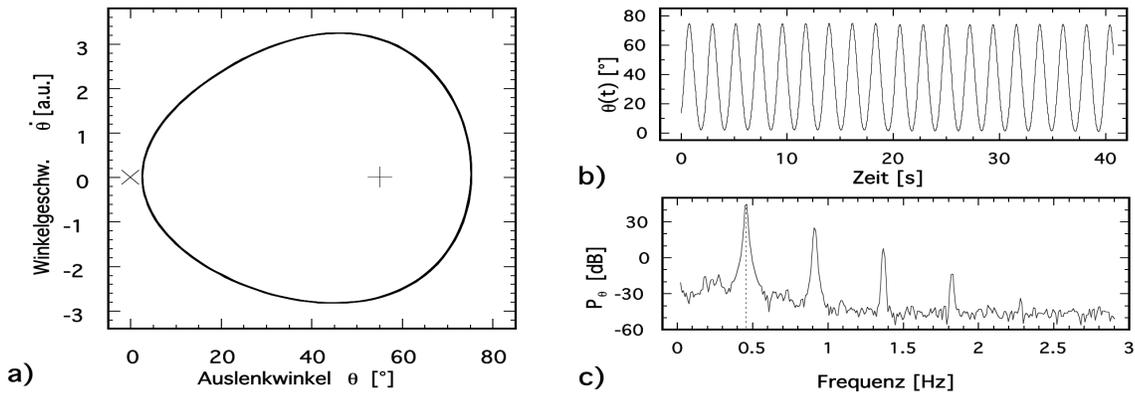


Abbildung 2.11: Phasenraumportrait a), Zeitserie b) und Leistungsspektrum c) der Periode 2 mit der Anregungsfrequenz $\omega_e = 2.86$ 1/s, gemessen am invertierten Pendel.

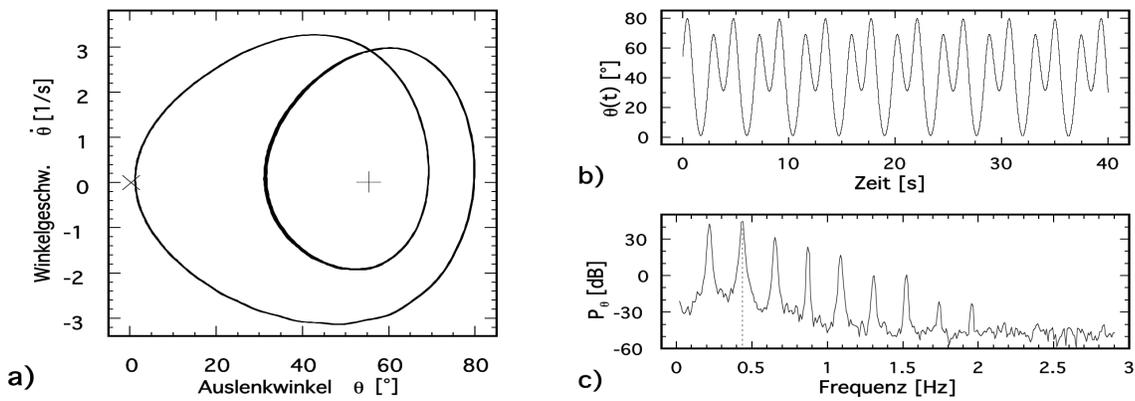


Abbildung 2.12: Periode 2 mit $\omega_e = 2.77$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

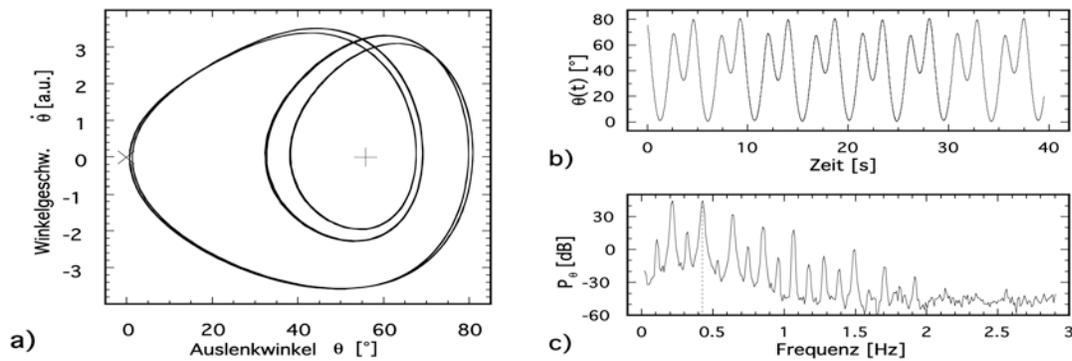


Abbildung 2.13: Periode 4 mit $\omega_e = 2.67$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

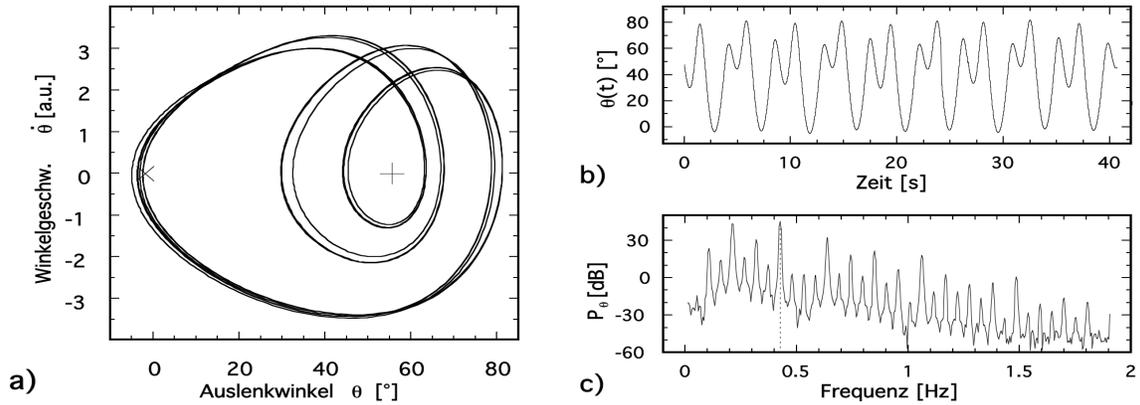


Abbildung 2.14: Periode 8 mit $\omega_e = 2.66$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

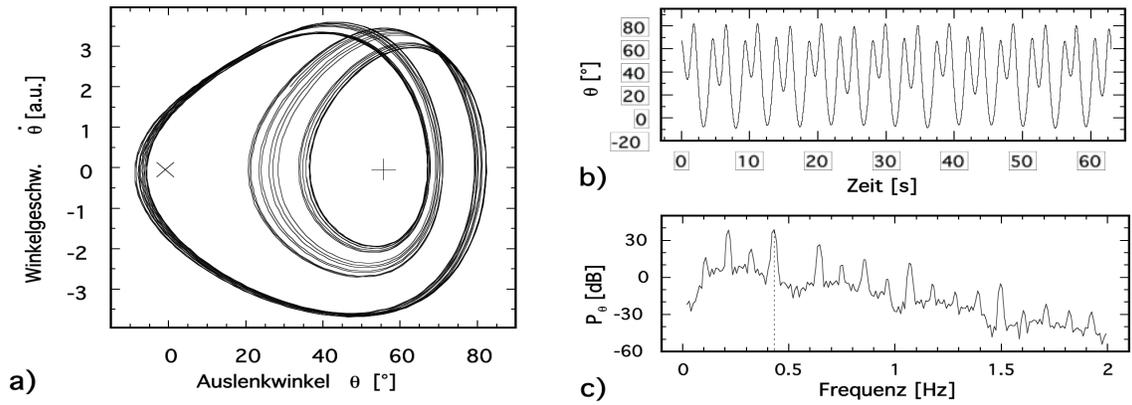


Abbildung 2.15: Chaotisches Aufbrechen nach Periode 8 bei $\omega_e = 2.64$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

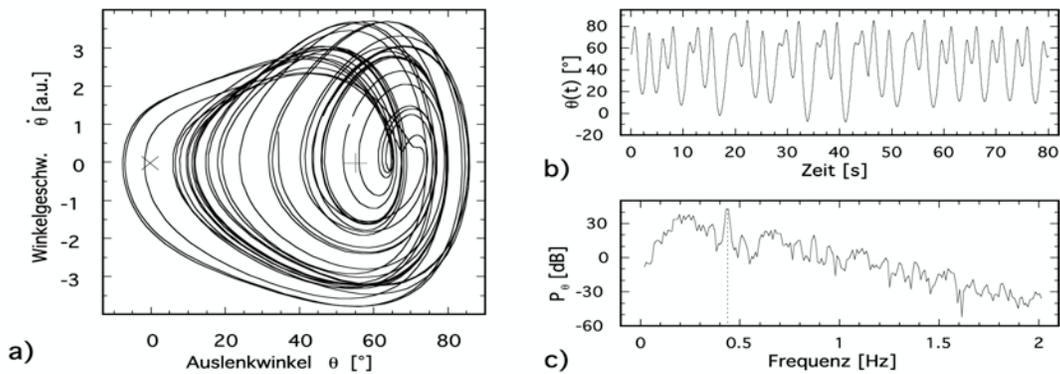


Abbildung 2.16: Voll chaotischer Bereich bei $\omega_e = 2.61$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

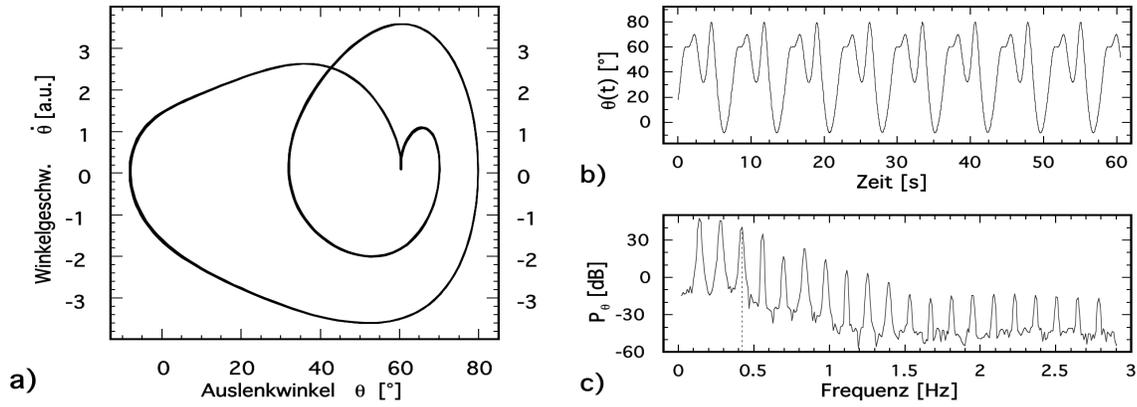


Abbildung 2.17: Fenster der Periode 3 mit $\omega_e = 2.59$ 1/s (Auftragung siehe Abb. 2.11).

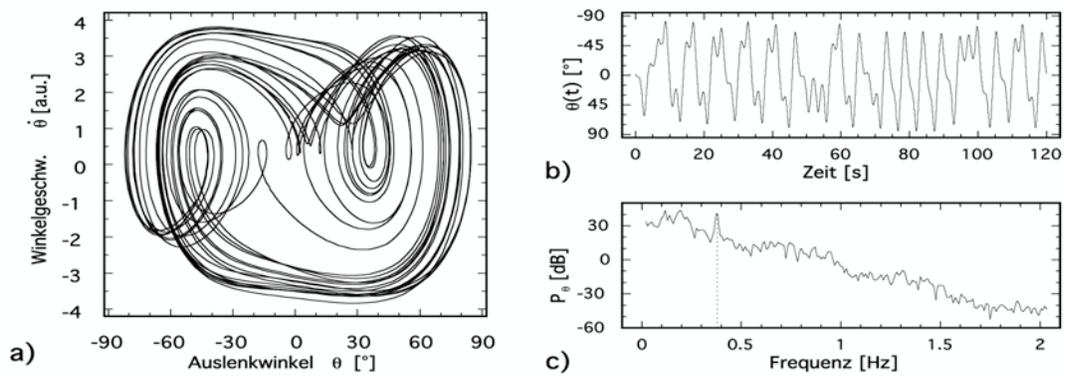


Abbildung 2.18: Chaotischer Bereich über beide Potentialmulden; $\omega_e = 2.39$ 1/s

Kapitel 3

Der Shinriki-Oszillator

Der zweite Versuchsteil des Praktikums besteht, wie in Kapitel 1.3 schon angedeutet, aus der Untersuchung eines autonomen elektrischen Schwingkreises. Der hier verwendete Schwingkreis ist eine leichte Modifikation des sogenannten Shinriki-Oszillators, der 1981 von Shinriki et. al. vorgestellt wurde [15]. Die Veränderung zur Originalveröffentlichung besteht in der Verwendung eines Zener-Diodenpaares anstatt von normalen Dioden als nichtlineares Element.¹ Der Aufbau des Schwingkreises ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

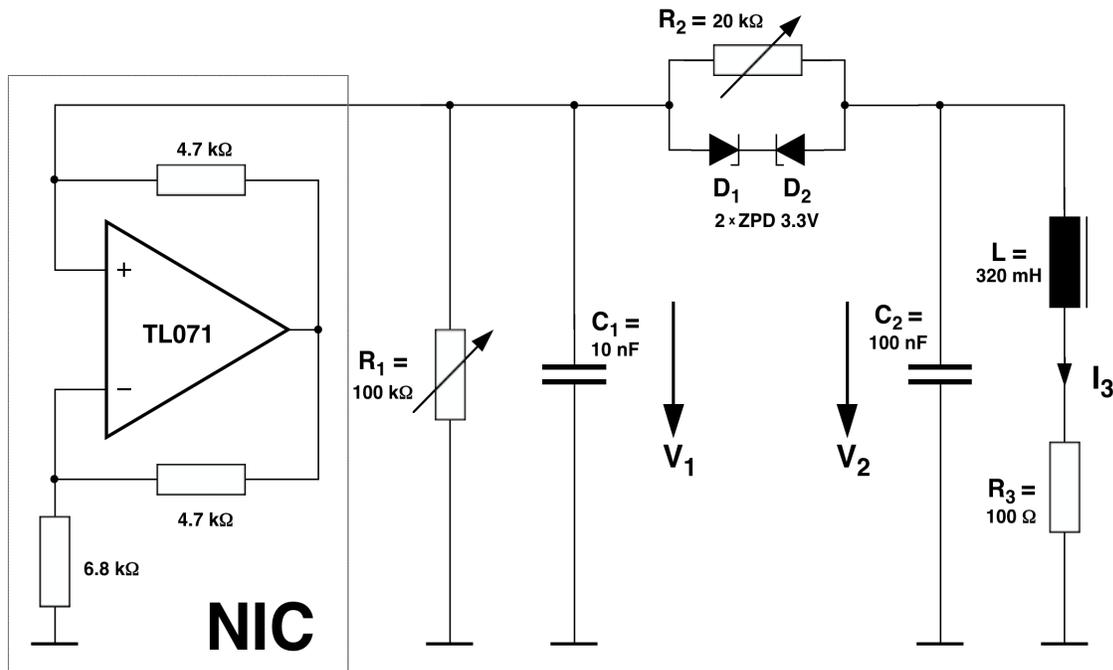


Abbildung 3.1: Elektrische Schaltung des Shinriki-Oszillators

¹Matsumoto, Chua und Komuro stellten 1985 einen ähnlichen Schwingkreis vor, der nun als Chua-Oszillator bekannt ist [16]. Bei diesem Oszillator befindet sich die Nichtlinearität in der IV-Kennlinie des NICs.

3.1 Funktionsweise und Theorie

Der Operationsverstärker (OPV) ist als negativer Impedanzkonverter (engl. *negative impedance converter*, oder kurz *NIC*) geschaltet und hat demnach in einem bestimmten Bereich eine Strom-Spannungs-Kennlinie mit negativer Steigung. Eine nähere Beschreibung der Funktionsweise eines NICs findet man in [13] S. 91ff oder auch in [14]. Der in der Schaltung mit einem TL071-OPV aufgebaute NIC hat die in Abbildung 3.2 gezeigte Strom-Spannungs-Kennlinie.

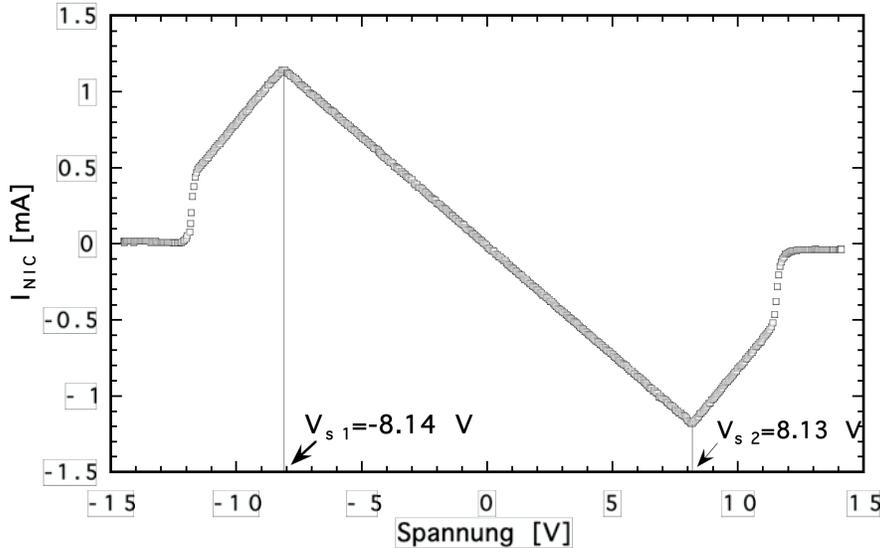
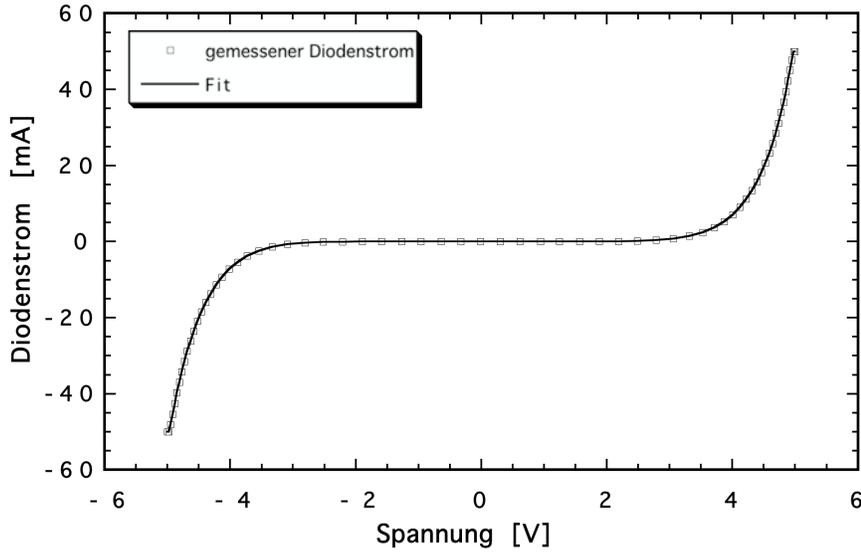


Abbildung 3.2: Gemessene I - V -Kennlinie des NIC (Rampendauer länger ca. 5 s).

Die endliche Betriebsspannung des Operationsverstärkers begrenzt die invertierende Funktion des NIC auf ein Intervall von ca. -8.1 V bis 8.1 V. Da der NIC nur innerhalb dieses Intervalls betrieben wird, ist für die Funktion der Schaltung lediglich dieser Bereich von Bedeutung. Der sich aus der Steigung der Geraden in diesem Intervall ergebene Widerstand beträgt: $R_{NIC} = -6.988$ k Ω . Durch den Stellwiderstand R_1 (s.Abb. 3.1) kann die Leistungseinkopplung des NIC auf die restliche Schaltung verändert werden und stellt somit einen Kontrollparameter des Oszillators dar. In Parallelschaltung zum NIC befindet sich der Kondensator C_1 . Dieser Schaltungsteil wird über eine Parallelschaltung von einem weiteren Stellwiderstand R_2 und zwei gegeneinandergeschalteten Zener-Dioden D_1, D_2 an einen gedämpften LC -Parallelschwingkreis gekoppelt. Die Werte von Kondensator C_2 und der Spule L bestimmen somit die Grundfrequenz des Oszillators. Mit $C_2 = 99.7$ nF und $L = 329$ mH ergibt sich diese zu:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{329\text{mH} \cdot 99.7\text{nF}}} \approx 878 \text{ Hz}. \quad (3.1)$$

Ganz entscheidend für das Verhalten der Schaltung ist weiterhin die Strom-Spannungs-Charakteristik der Kopplung zwischen dem LC_2 -Schwingkreis und dem Kondensator C_1 . Diese wird im wesentlichen durch die Strom-Spannungs-Kennlinie der gegeneinandergeschalteten Zenerdioden bestimmt. Diese ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

Abbildung 3.3: Gemessene I - V -Kennlinie des Zenerdiodenpaares.

Der Diodenstrom läßt sich durch folgende Funktion approximieren:

$$I_d = f_d(V) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |V| < V_d \\ \text{sgn}(V)(A\Delta V + B\Delta V^3 + C\Delta V^5) & \text{andernfalls} \end{cases}, \quad (3.2)$$

mit $A = 1.0862 \text{ mA/V}$, $B = -0.1615 \text{ mA/V}^3$, $C = 0.3021 \text{ mA/V}^5$, $\Delta V = |V| - V_d$ und $V_d = 3.3\text{V}$ sowie $\text{sgn}(V) = \pm 1$ für $V > 0$ bzw. $V < 0$, wobei die Spannung in Volt und der Strom in Milliampere angegeben sind (vgl. [17]). Durch den parallel zu den Zenerdioden geschalteten Stellwiderstand R_2 fließt ein zusätzlicher Strom, der die resultierende Kopplungskennlinie einstellbar verändert. Die Leitwertfunktion des gesamten Kopplungsgliedes ergibt sich somit zu:

$$f(V) = f_d(V) + \frac{V}{R_2}. \quad (3.3)$$

Der Stellwiderstand R_2 ist also ein zweiter Kontrollparameter der Schaltung.

über die Kirchhoffschen Gesetze lassen sich die Differentialgleichungen aufstellen, mit denen der Oszillator beschrieben werden kann. Diese sind mit den Bezeichnungen aus Abbildung 3.1:

$$\begin{aligned} C_1 \dot{V}_1 &= V_1 \left(\frac{1}{R_{NIC}} - \frac{1}{R_1} \right) - f(V_1 - V_2) \\ C_2 \dot{V}_2 &= f(V_1 - V_2) - I_3 \\ L \dot{I}_3 &= -I_3 R_3 + V_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Durch eine erste Analyse der Differentialgleichungen können bereits wichtige Aussagen über den Verlauf der Bewegung gemacht werden ohne diese direkt zu lösen. Zunächst findet man, daß die Trajektorien im Phasenraum punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs im Phasenraum verlaufen, denn es gilt unter Ausnutzung der Punktsymmetrie von $f(V)$:

$$C_1(-\dot{V}_1) = -V_1 \left(\frac{1}{R_{NIC}} - \frac{1}{R_1} \right) + f(V_1 - V_2) = -(C_1 \dot{V}_1)$$

$$\begin{aligned} C_2(-\dot{V}_2) &= -f(V_1 - V_2) + I_3 = -(C_2\dot{V}_2) \\ L(-\dot{I}_3) &= I_3 R_3 - V_2 = -(L\dot{I}_3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Weitere Informationen über den Bewegungsverlauf eines dynamischen Systems lassen sich durch die Kenntnis der Fixpunkte gewinnen. Die Fixpunkte können durch 'Nullsetzen' der Ableitung der Phasenraumvariablen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= V_1 \left(\frac{1}{R_{NIC}} - \frac{1}{R_1} \right) - f(V_1 - V_2) \\ 0 &= f(V_1 - V_2) - I_3 \\ 0 &= -I_3 R_3 + V_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Das so erhaltene Gleichungssystem kann durch kurze Umformung auf zwei Dimensionen vereinfacht werden. Die Fixpunkte sind dann durch folgende Bedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} f(V_1 - V_2) &= V_1 \left(\frac{1}{R_{NIC}} - \frac{1}{R_1} \right) \\ f(V_1 - V_2) &= \frac{V_2}{R_3} \end{aligned} \quad (3.7)$$

I_3 berechnet sich dann mittels $I_3 = V_2/R_3$ direkt aus V_2 . Durch die komplizierte Gestalt der Kopplungsfunktion $f(V)$ (Gl. 3.3), die im wesentlichen durch die Gleichung der Diodenkennlinie (Gl. 3.2) gegeben ist, ist eine analytische Lösung nicht möglich. Außer der trivialen Lösung $L_1 = (0, 0, 0)$ existieren noch zwei weitere Fixpunkte, wenn die Parameter R_1 und R_2 gewisse Werte überschreiten. Die Lage der Fixpunkte ist dann somit auch von den Werten der Parameter abhängig. Für $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$ erhält man zum Beispiel $L_2 = (-3.778 \text{ V}, -0.046 \text{ V}, -4.6 \text{ mA})$ und $L_3 = (3.778 \text{ V}, 0.046 \text{ V}, 4.6 \text{ mA})$. Man kann sich die Lösungen für V_1 und V_2 anschaulich als die Schnittstellen (V_{1s}, V_{2s}) der Fläche des Graphen von $f(V_1 - V_2)$ mit den Ebenen, die sich aus den Funktionen $f_1(V_1, V_2) = V_1 \left(\frac{1}{R_{NIC}} - \frac{1}{R_1} \right)$ und $f_2(V_1, V_2) = \frac{V_2}{R_3}$ ergeben, vorstellen. Da durch R_1 und R_2 die Steigungen der Graphen von f bzw. f_1 bestimmt werden, wird so deutlich, daß die Fixpunkte 2 und 3 erst nach überschreiten bestimmter Werte von R_1 und R_2 auftreten. Abbildung 3.4 zeigt dies für $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$.

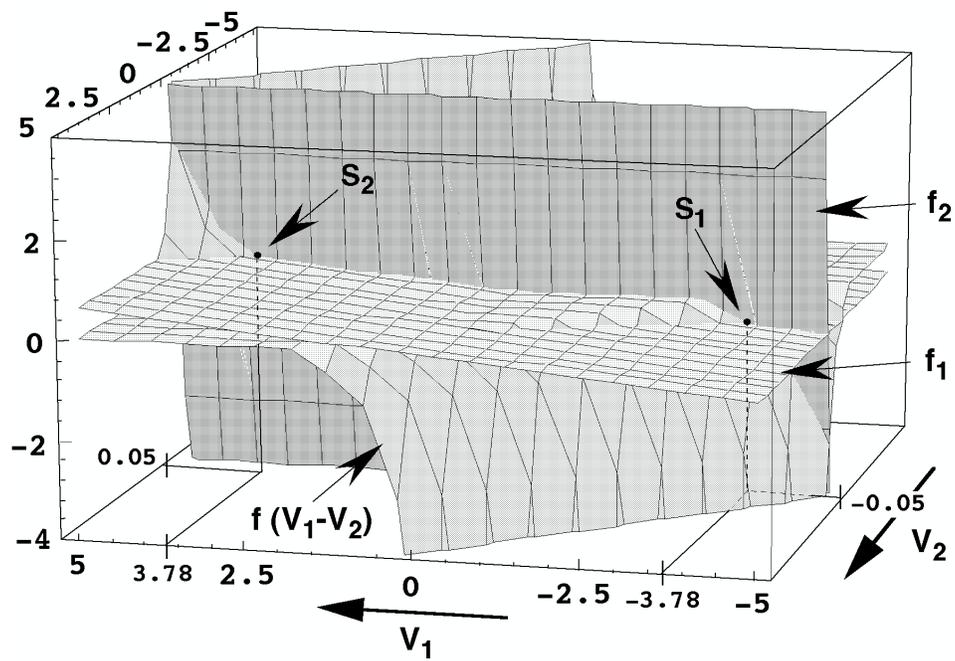


Abbildung 3.4: Darstellung der Funktionen $f(V_1 - V_2)$, $f_1(V_1, V_2)$ und $f_2(V_1, V_2)$ zur Verdeutlichung der Schnittstellen der Funktionsgraphen als Lösungen der Fixpunktbedingung.

3.2 Numerische Simulation

Das Bifurkationsdiagramm kann durch numerische Lösung der Differentialgleichungen (2.7) mit Hilfe des Computers berechnet werden. Um das Bifurkationsdiagramm zu erhalten wurde das Differentialgleichungssystem, wie schon bei der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung des invertierten Pendels, einem Runge-Kutta-Verfahren (s. Kapitel 2.1.2) integriert. Dieses wurde unter Veränderung des Parameters R_1 bei festem Wert von $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$ durchgeführt. Von den für den jeweiligen Parameterwert R_1 erhaltenen Trajektorien wurden dann die Maxima bestimmt und in Abbildung 3.5 über dem entsprechenden Parameterwert R_1 aufgetragen.

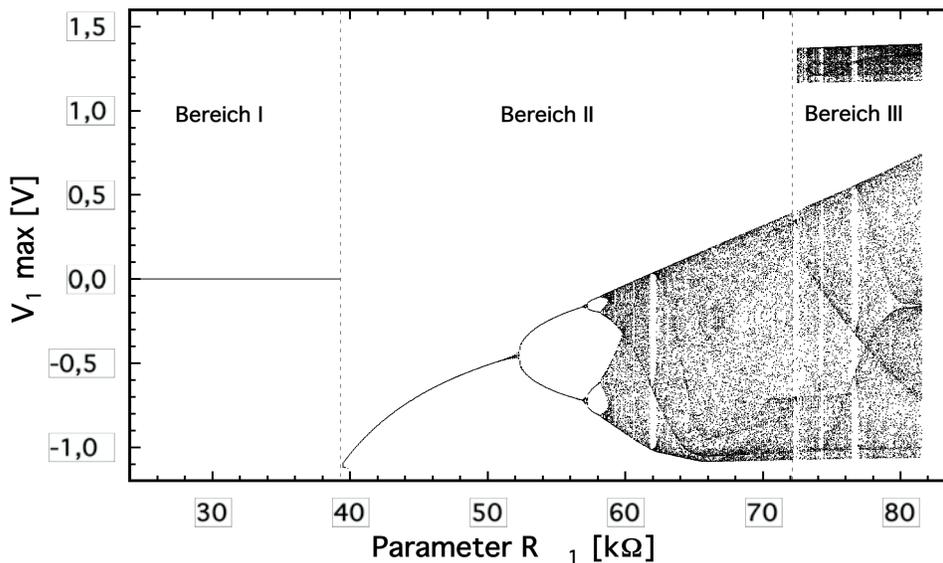


Abbildung 3.5: Berechnetes Bifurkationsdiagramm für $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$.

Man kann dieses Diagramm in drei Teilbereiche einteilen. Für Parameterwerte von R_1 bis zu $39.2 \text{ k}\Omega$ existiert ein stabiler Fixpunkt, der nicht verlassen wird (Bereich I). Bei $R_1 = 39.2 \text{ k}\Omega$ wird dieser Fixpunkt instabil, und die Bewegung verläuft als Grenzzyklus um einen der beiden neu entstandenen Fixpunkte (s.o.). Bei weiterer Erhöhung von R_1 bis hin zu $R_1 = 72.2 \text{ k}\Omega$ ist das klassische Großmann-Feigenbaum-Szenario der Periodenverdopplung mit anschließenden chaotischen Bereichen, die von periodischen Fenstern unterbrochen werden, zu beobachten (Bereich II). Ab $R_1 = 72.2 \text{ k}\Omega$ kollidiert der Attraktor mit seiner Basisingrenze und es entsteht ein nun beide stabilen Fixpunkte einschließender großer chaotischer Attraktor, erkennbar an den zwei getrennten chaotischen Bändern im Bereich III. Dieser Bereich wird aufgrund der Form des Attraktors (s. spätere Abbildung 3.19) auch Doppel-Spiral-Bereich (oder *double-scroll-chaos*) genannt.

3.3 Experimentelle Realisation

Für das Praktikum ist ein relativ störungsempfindlicher sowie ein für die Praktikanten leicht zu durchschauender Aufbau entscheidend. Daher wurde die Schaltung auf einer geätzten Platine so aufgebaut, daß die einzelnen Bauteile gemäß der Anordnung im Schaltplan auf der Platine platziert wurden (Platinenlayout s. Anhang). Um den Aufbau für den Praktikanten nachvollziehbar zu halten, wurde die Platine in ein Plastikgehäuse mit einem durchsichtigen Deckel aus Plexiglas eingebaut und die Leiterbahnen auf der Platinenoberseite gut sichtbar nachgezeichnet (s. Abbildung 3.6).

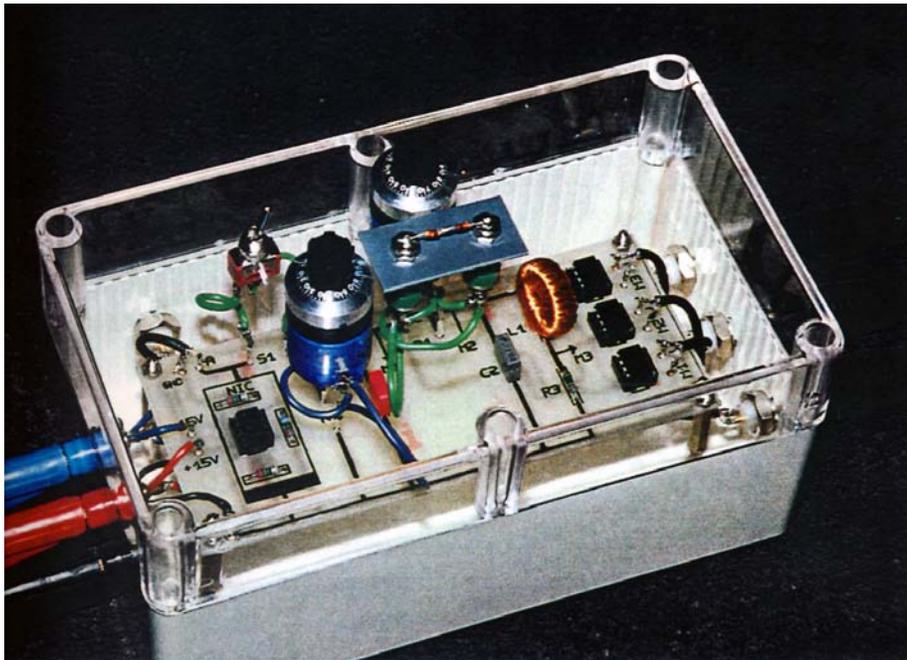


Abbildung 3.6: Foto des Shinriki-Oszillators im Gehäuse.

Als Operationsverstärker (OPV) wurde ein JFET-OPV vom Typ TL071 verwendet. C_1 und C_2 sind Folienkondensatoren. Als Stellwiderstände wurden 10-Gang-Potentiometer mit einem Drehknopf mit eingebauter Skala verwendet, so daß eine Einstellgenauigkeit von $1/1000$ des Widerstand-Endwertes erreicht wird. Die Spule wurde mit einem 0.3 mm Kupferlackdraht auf einen Ferritkern mit der relativen Permeabilität $\mu \approx 5.97$ gewickelt und besitzt einen Ohmschen Widerstand von $R_L = 1.6\ \Omega$. Desweiteren wurden die Meßpunkte M_1 bis M_3 durch Pufferverstärker, die wiederum mit OPVs vom Typ TL071 aufgebaut wurden, vom Ausgang entkoppelt. Dabei haben die Ausgangsverstärker von M_1 und M_2 als reine Spannungsfolger eine Verstärkung von 1, während bei M_3 das Signal um den Faktor 10 verstärkt wird. Durch die direkte Verstärkung auf der Platine wird das Signal-Rausch-Verhältnis hier wesentlich verbessert, da das Signal an M_3 etwa um den Faktor 10 kleiner ist.

3.4 Ergebnisse

Da es beim Shinriki-Oszillator mit R_1 und R_2 zwei unabhängige Parameter gibt, bietet sich ein Phasendiagramm an, um einen Überblick über die verschiedenen Schwingungszustände des Oszillators bei den unterschiedlichen Parameterkombinationen zu bekommen. Ein solches Phasendiagramm ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Die Linien geben die Phasengrenzen der unterschiedlichen Schwingungszustände wieder. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden in der Darstellung die Perioden 6 und 8 weggelassen.

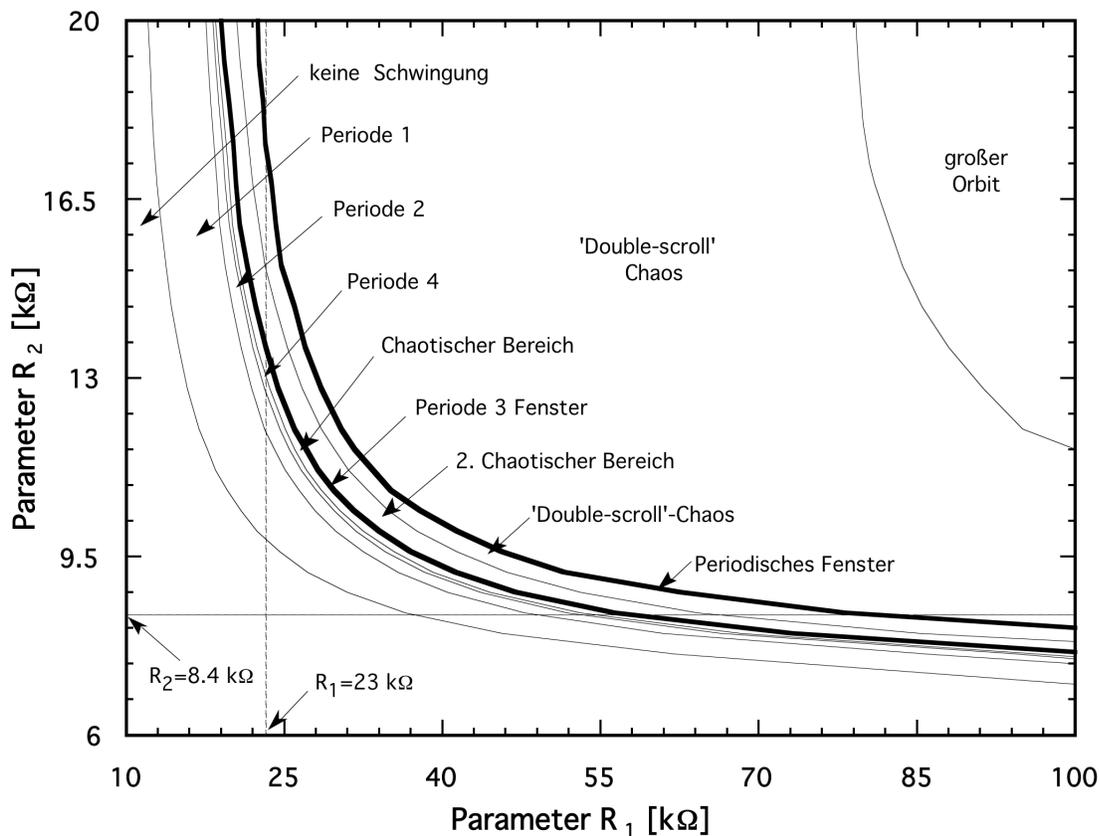


Abbildung 3.7: Phasendiagramm des Shinriki-Oszillators.

Aus dem Phasendiagramm, bzw. aus den zugrundeliegenden Meßwerten, kann die Großmann- oder Feigenbaum-Konstante aus drei aufeinanderfolgenden Bifurkationsstellen mittels Gleichung (1.6) näherungsweise bestimmt werden. Im Phasendiagramm (Abb. 3.7) sind dies die Schnittpunkte der Bereichsgrenzen mit waagerechten bzw. senkrechten Geraden, die einem konstanten Parameter R_1 oder R_2 entsprechen. Durch Mittelung über 10 so erhaltene Zahlenwerte ergibt sich folgende Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante für den Shinriki-Oszillator.

$$\delta_{Shinr} = 3.6 \quad (3.8)$$

Die Abweichung zum Literaturwert $\delta_{Lit} = 4.669\dots$ ist dadurch zu erklären, daß die Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante δ eigentlich ein Grenzwert nach unendlich vielen Bifurkationen ist.

Desweiteren ist geht aus dem Phasendiagramm hervor, daß es günstig ist, ein Bifurkationsdiagramm bei festem Parameter $R_1 \approx 23 \text{ k}\Omega$ und variablem Parameter R_2 oder bei festem Parameter $R_2 \approx 8.4 \text{ k}\Omega$ und variablem Parameter R_1 aufzunehmen, da in diesen Bereichen das Bifurkationsszenario am breitesten ist, und es doch den ganzen Bifurkationsbereich umfaßt. Dies ist im Diagramm durch die gestrichelten Linien angedeutet. Ein solches Bifurkationsdiagramm wurde dann für $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$ fest und R_1 variabel aufgenommen, indem die Maxima der Spannung V_1 bestimmt und dann in Abbildung 3.8 über dem Parameter R_1 aufgetragen wurden.

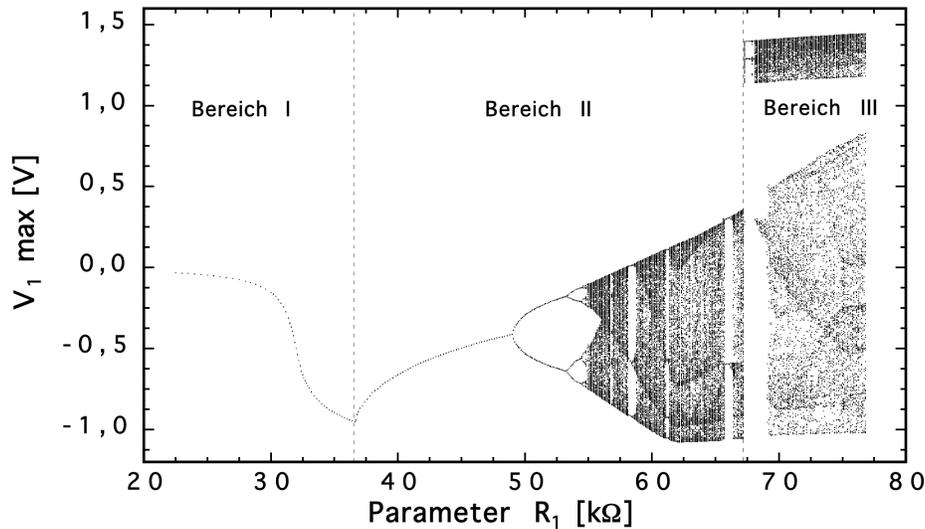


Abbildung 3.8: Gemessenes Bifurkationsdiagramm des Shinriki-Oszillators für $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$.

Vergleicht man das gemessene Bifurkationsdiagramm (Abbildung 3.8) mit dem errechneten aus Abbildung 3.5, so erkennt man eine gute qualitative Übereinstimmung. Es treten die gleichen drei Bereiche,; Fixpunkt, Großmann-Feigenbaum-Szenario und Double-Scroll-Bereich auf, die schon in Abschnitt 3.2 erörtert wurden. Es ist jedoch festzustellen, daß diese Bereiche etwas gegeneinander verschoben sind. So beginnt das Großmann-Feigenbaum-Szenario im gemessenen Fall bei $R_1 = 36.8 \text{ k}\Omega$ (gegenüber $39.2 \text{ k}\Omega$) und endet bei $R_1 = 67.2 \text{ k}\Omega$ (gegenüber $72.2 \text{ k}\Omega$).

Aus den Verzweigungsstellen im Bifurkationsdiagramm läßt sich mittels Gleichung (1.6) erneut die Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante δ ermitteln. Da mittels Ausschnittvergrößerung auch die 4. Bifurkation zur Periode 16 mitberücksichtigt werden kann, ist es hier möglich, zusätzlich die zweite Iterierte der Großmann-Feigenbaum-Zahl anzugeben. Aus dem Bifurkationsdiagramm erhält man für den Oszillator folgende Iterationen für die Großmann- bzw. Feigenbaum-Konstante:

$$\delta_{SinrBif1} = 3.6 \quad \delta_{SinrBif2} = 4.4 \quad (3.9)$$

Während die erste Iterierte $\delta_{ShinrBif1}$ mit dem aus dem Phasendiagramm erhaltenen Wert überein stimmt, nähert sich die ermittelte Großmann-Feigenbaum-Zahl im zweiten Iterationsschritt dem Literaturwert schon auf 5% genau an. Wie schon im vorigen Kapitel, soll auch

am Ende dieses Kapitels über den Shinriki-Oszillator eine Zusammenstellung der Phasenraumdarstellung der verschiedenen Schwingungszustände des Oszillators stehen. Diese gibt einen guten Überblick über das Systemverhalten bei den entsprechenden Parameterwerten. Bei allen Abbildungen wurde der Widerstand R_2 wieder fest auf $8.4\text{ k}\Omega$ eingestellt, um einen Vergleich mit dem Bifurkationsdiagramm zu ermöglichen. Jede Abbildung für einen bestimmten Parameterwert beinhaltet

- die Phasenraumdarstellung
- das zugehörige Leistungsspektrum von V_1
- die Autokorrelationsfunktion von V_1
- einen Poincaré-Schnitt mit der Ebene, die durch die drei Fixpunkte geht.
- die Wiederkehrabbildung von V_{1max}

und gibt damit nach Kapitel 1.2 eine gute Charakterisierung des jeweiligen Schwingungszustandes.

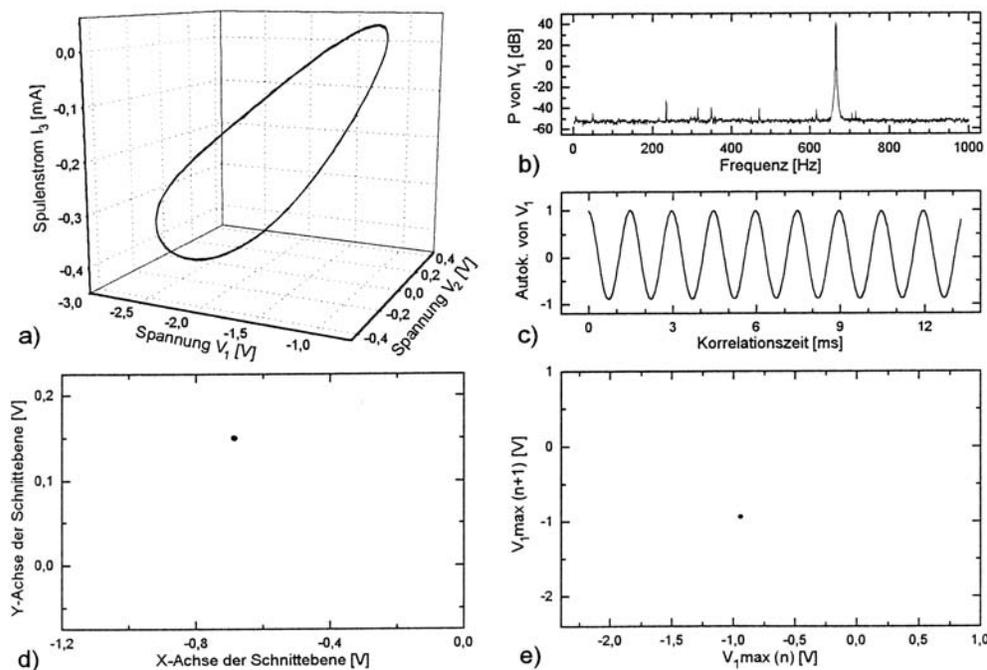


Abbildung 3.9: a) die Phasenraumdarstellung, b) das zugehörige Leistungsspektrum von V_1 , c) die Autokorrelationsfunktion von V_1 , d) ein Poincaré-Schnitt und e) die Wiederkehrabbildung von V_{1max} für eine Schwingung mit der Periode 1 bei $R_1 = 45.5\text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4\text{ k}\Omega$.

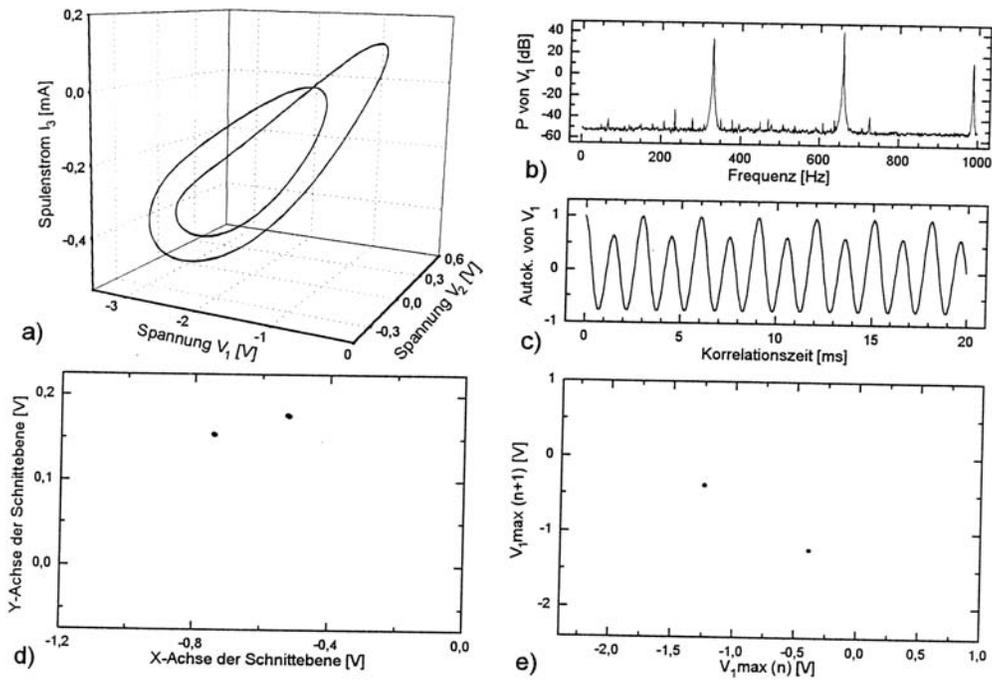


Abbildung 3.10: Darstellung einer Schwingung mit Periode 2 gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 51.5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

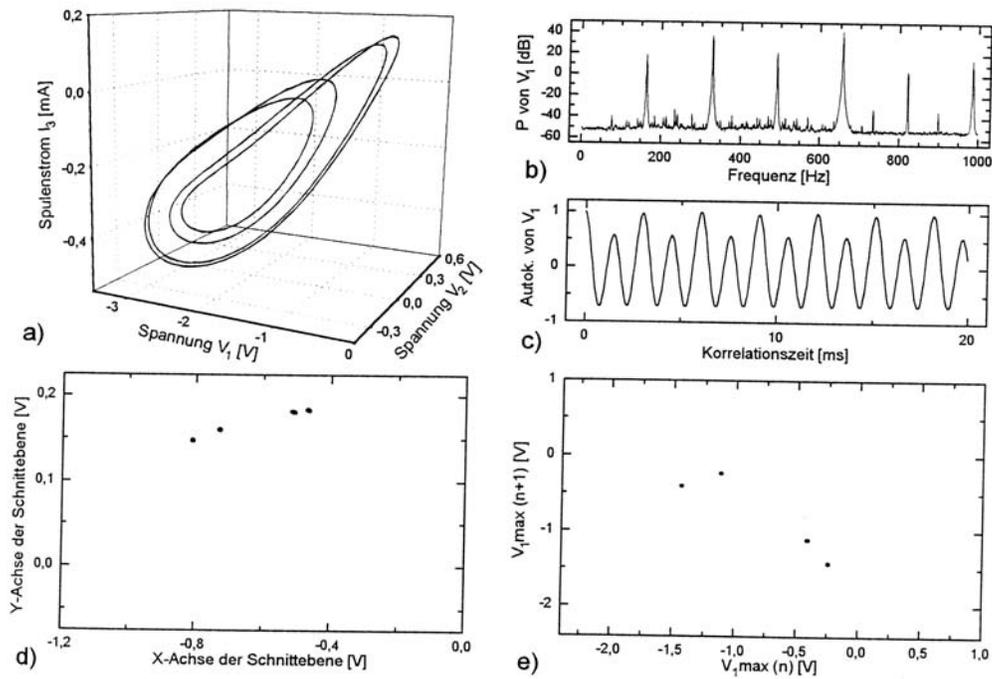


Abbildung 3.11: Darstellung einer Schwingung mit Periode 4 gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 54.0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

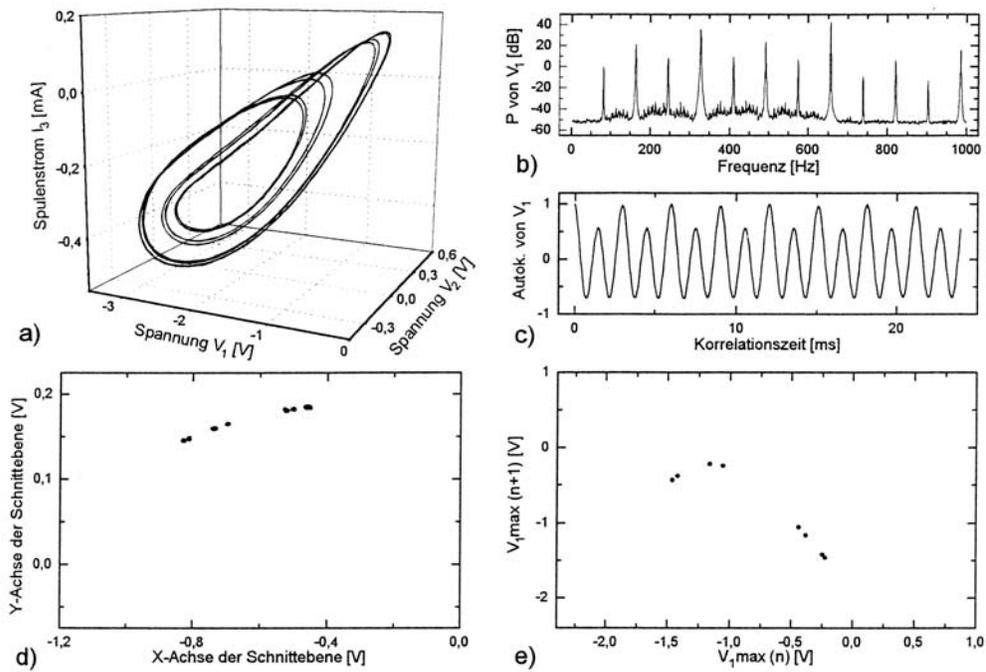


Abbildung 3.12: Darstellung einer Schwingung mit Periode 8 gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 54.1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

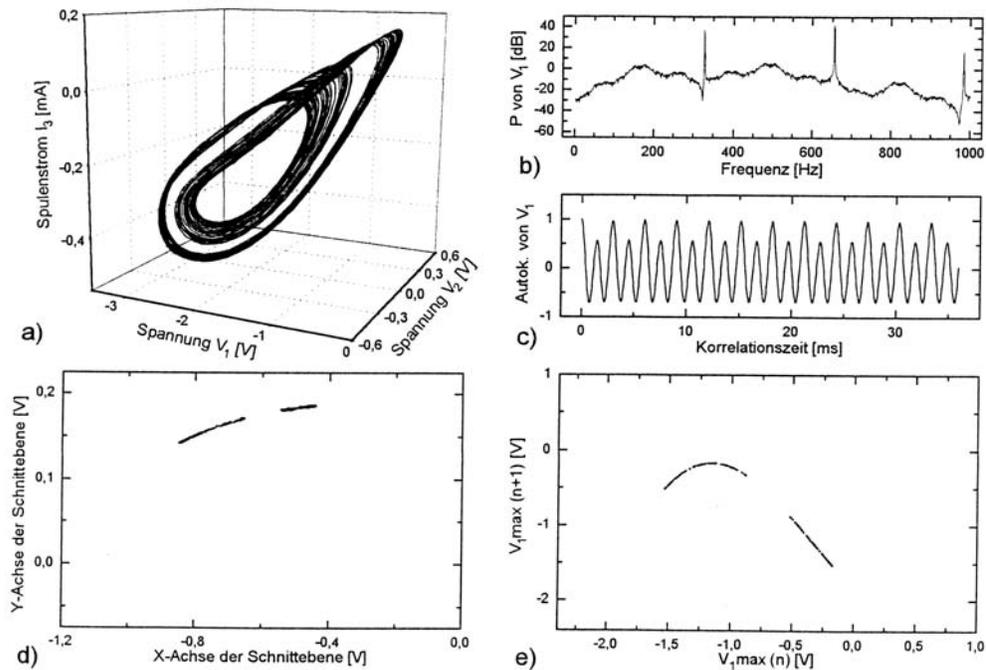


Abbildung 3.13: Aufbrechender chaotischer Bereich: $R_1 = 54.8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$ (Darstellung gemäß Abb. 3.9).

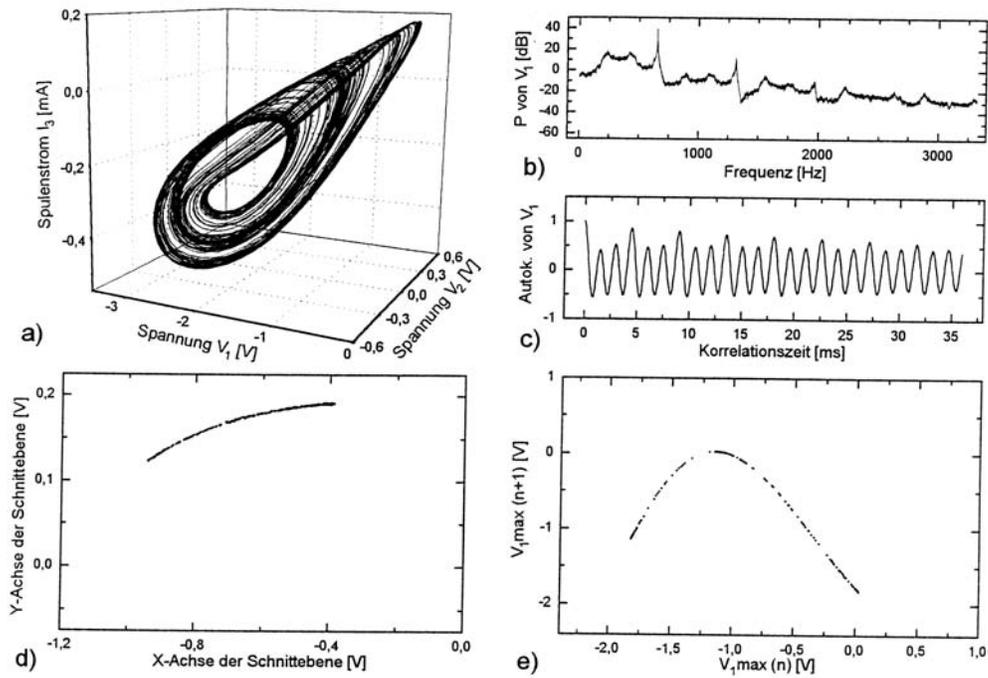


Abbildung 3.14: Voll chaotischer rösslerartiger Attraktor bei $R_1 = 57.5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$ (Darstellung gemäß Abb. 3.9).

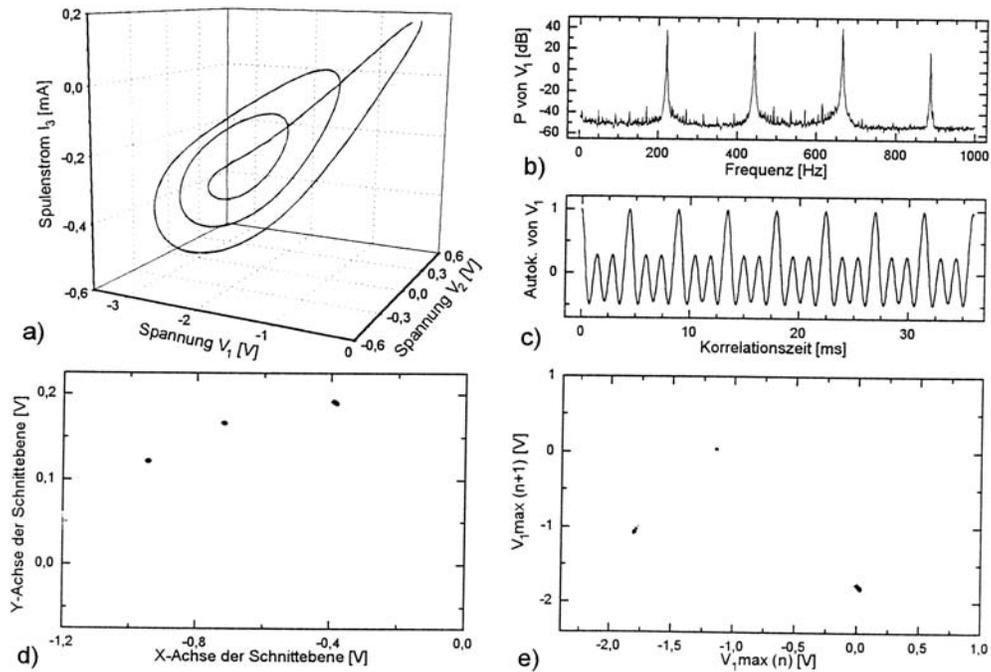


Abbildung 3.15: Darstellung einer Schwingung im Fenster mit Periode 3 gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 57.6 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

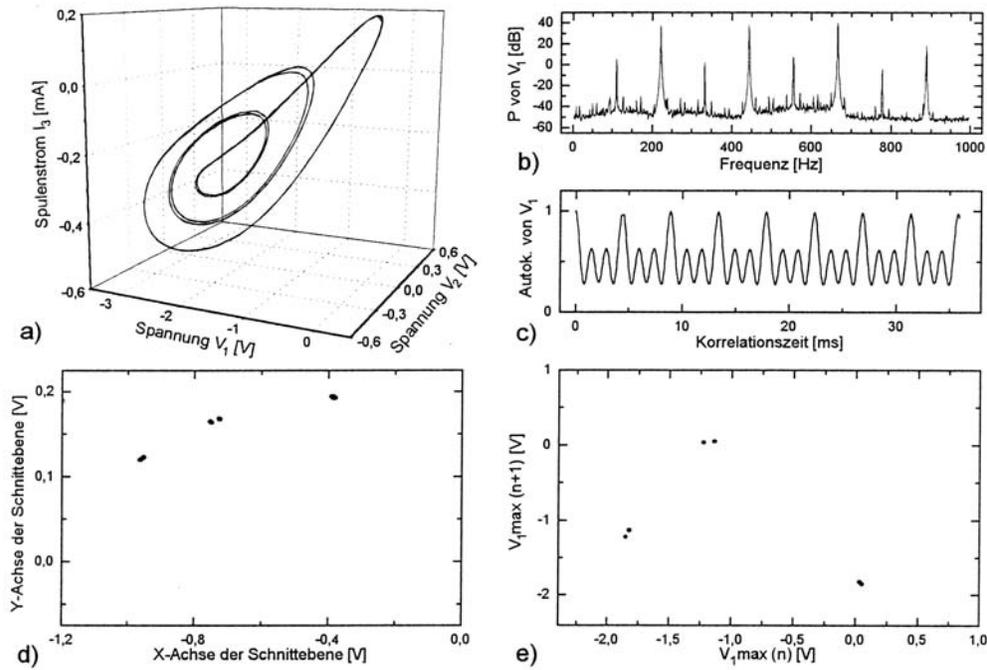


Abbildung 3.16: Darstellung einer Schwingung mit Periode 6 gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 57.9 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

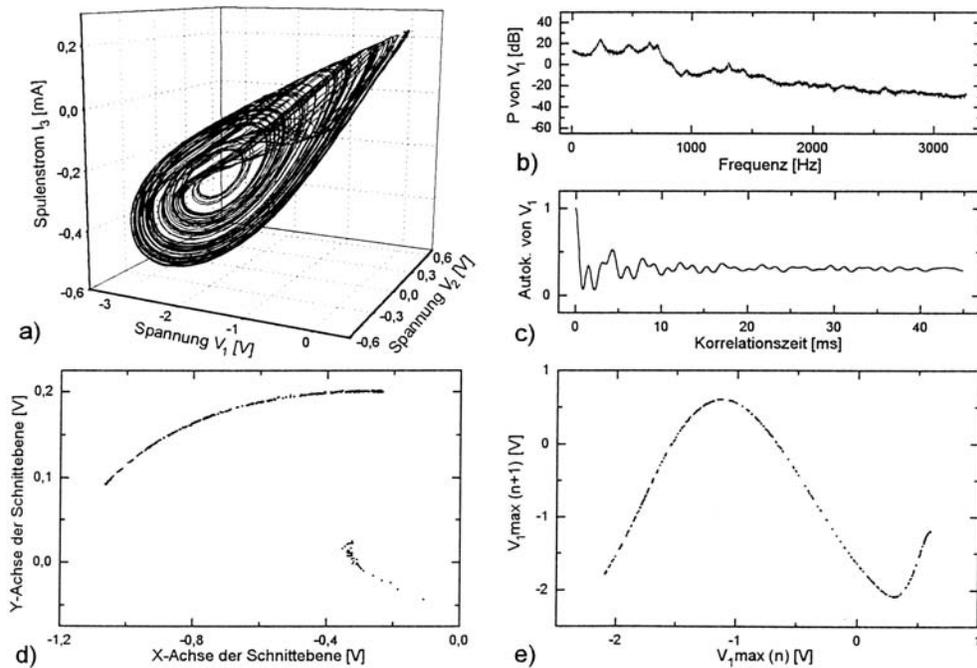


Abbildung 3.17: Spiral-Chaos kurz vor dem 'double-scroll' Bereich: $R_1 = 59.0 \text{ k}\Omega$ (Darstellung gemäß Abb. 3.9).

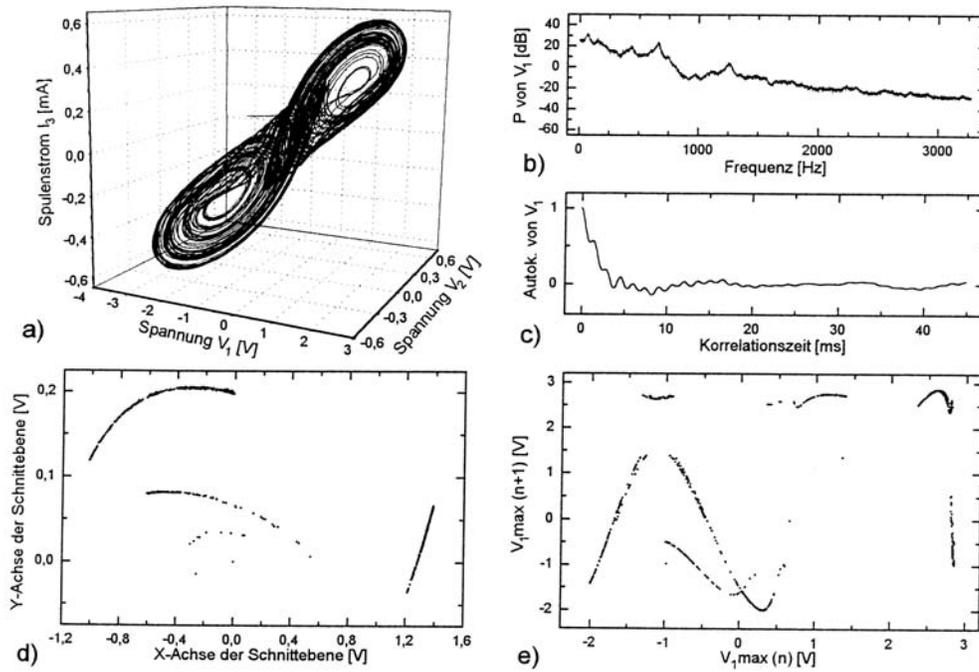


Abbildung 3.18: 'Double-dcroll' Chaos bei $R_1 = 68.0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$ (Darstellung gemäß Abb. 3.9).

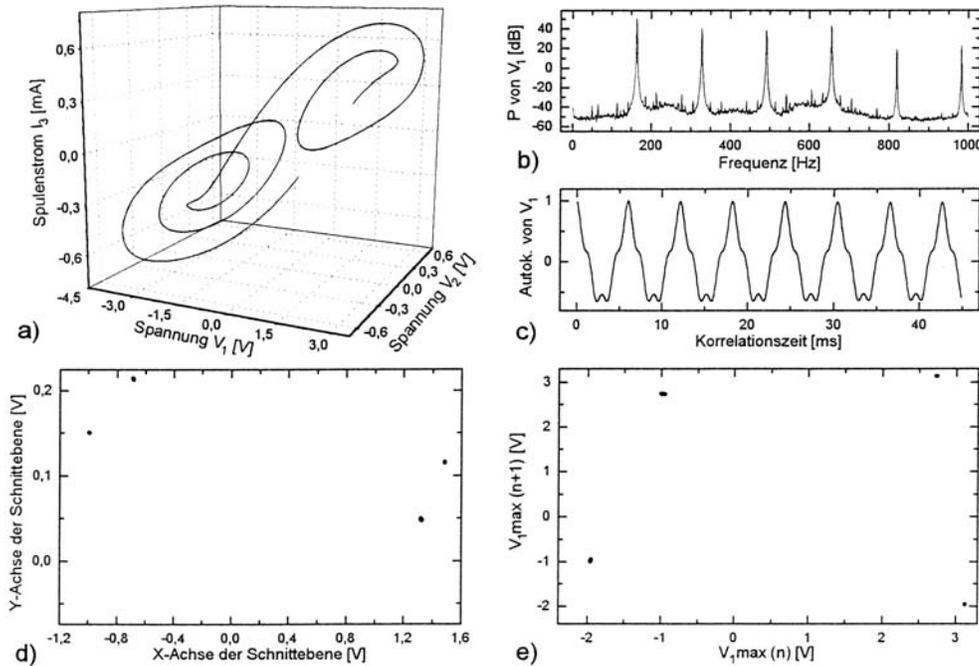


Abbildung 3.19: Darstellung einer periodischen Schwingung im 'double-scroll'-Bereich gemäß Abb. 3.9 ($R_1 = 89.2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8.4 \text{ k}\Omega$).

Kapitel 4

Der Praktikumsversuch

4.1 Zur Versuchsanleitung und Praktikumsvorbereitung

Zu jedem Praktikumsversuch gibt es eine Versuchsanleitung, die den Praktikanten rechtzeitig vor dem Versuchstag ausgehändigt wird. Anhand dieser Anleitung soll sich der Praktikant auf das Praktikum vorbereiten, die Versuche während des Praktikums durchführen und anschließend eine Auswertung anfertigen können. Die dazu notwendigen Informationen sind entweder direkt in der Anleitung oder bei den in einem kommentierten Literaturverzeichnis angegebenen Literaturstellen nachzulesen.

Die Praktikumsanleitung dieses Versuchs gliedert sich in vier Teile. Der erste Abschnitt beinhaltet eine Einführung in das Thema. In den Teilen zwei und drei werden die beiden Teilversuche vorgestellt und am Ende des jeweiligen Abschnittes die zu bearbeitenden Aufgaben gestellt. Diese sind nicht bis in den kleinsten Arbeitsschritt ausformuliert, so daß der Praktikant einen gewissen Spielraum hat, wie er die jeweilige Aufgabe löst. Die Aufgabenstellung und weiteren Informationen in der Anleitung oder den Literaturstellen sind jedoch konkret genug, so daß sich der Praktikant bei der Vorbereitung ein Konzept machen kann. Diese Art der Aufgabenstellung erfordert vor Versuchsbeginn eine genaue Besprechung der Aufgaben mit dem Betreuer, der hier bei Unklarheiten verschiedene Hilfestellungen geben kann. Der große Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß sich der Praktikant eingehendere Überlegungen über die Lösung der Aufgabe machen muß und damit der Lernerfolg gesteigert werden kann. Im letzten Teil der Anleitung wird eine Kurzanleitung in das Meßprogramm LabVIEW, mit dem sämtliche Messungen durchgeführt werden, gegeben. Desweiteren sind in diesem Abschnitt einige Fragen zur Lernkontrolle gestellt, womit der Student seinen Wissensstand selbst überprüfen kann. Diese Fragen sind so formuliert, daß der Praktikant nach deren Beantwortung die im Praktikum geforderten Meßaufgaben erfolgreich bearbeiten können sollte. Den Abschluss der Anleitung bildet ein kommentiertes Literaturverzeichnis, anhand dessen sich der Praktikant über verschiedene Einzelheiten, sowie über Weiterführendes zum Thema informieren kann.

Aufgrund des größeren Umfangs, den die Vermittlung eines neuen physikalischen Teilgebietes von Natur aus mit sich bringt, ist für diesen Praktikumsversuch eine etwas intensivere Vorbereitung seitens der Praktikanten erforderlich. Dieser Mehraufwand muß natürlich dem Studenten nahegebracht und auch entsprechend motiviert werden, was äußerst wichtig ist. Da eine kurze Besprechung der Versuchsteilnehmer mit dem Betreuer ca. eine Woche vor dem Versuchstag ohnehin üblich ist, sollte darauf bei diesem Praktikumsversuch besonderen Wert gelegt werden.

4.2 Ablauf des Versuchstages

Wie allgemein üblich, sollte der Praktikumsversuch mit einer Besprechung mit dem Betreuer um ca. 8 Uhr beginnen. Diese wird jedoch aufgrund des umfangreichen Themas (s.o.) einen etwas längeren Zeitraum beanspruchen. Daran schließt sich der erste Versuchsteil über das invertierte Pendel an, der dann bis etwa 13 Uhr abgeschlossen sein sollte. Den größten Raum nimmt der zweite Versuchsteil über den Shinriki-Schwingkreis ein, der dann bis zum Ende des Versuchstages, ca. 18 Uhr, dauert. Dies ist jedoch keine zwingende Zeiteinteilung. Der Versuch ist so konzipiert, daß durch den Betreuer andere Schwerpunkte gesetzt werden können oder auch je nach Interesse und Vorkenntnis der Praktikanten der Versuchstag umgestaltet werden kann.

4.3 Zur Auswertung

Zu jedem geleisteten Versuch sind von den Praktikanten eine Auswertung der Meßergebnisse und eine vollständige Beantwortung der gestellten Aufgaben dem Betreuer vorzulegen. Da die Vorbereitung dieses Praktikumsversuchs etwas aufwendiger als bei anderen Versuchen ist, kann und sollte dies bei der Auswertung des Versuchs berücksichtigt werden. So kann beispielsweise auf eine einfache Wiederholung der in der Anleitung beschriebenen Phänomene der nichtlinearen Dynamik in der Auswertung verzichtet werden. Stattdessen ist eine knappe Beantwortung der Fragen zur Vorbereitung dem vorzuziehen. Da während des Versuches die Meßergebnisse gleich auf dem Drucker in entsprechender Form ausgegeben werden, entfällt auch das aufwendige Zeichnen der Graphen der Meßergebnisse. Um dem Studenten die angesprochenen Lerninhalte zu vermitteln, erscheint es als geeignet, daß die Auswertung die Beantwortung der Fragen zur Vorbereitung, eine kurze Interpretation der Meßergebnisse sowie die damit verbundene Beantwortung der restlichen Aufgaben enthalten sollte.

4.4 Resumé

Mit Fertigstellen dieser Arbeit steht dem Physikalischen Institut der Universität Bayreuth ein neuer Versuch für das Fortgeschrittenenpraktikum zum Thema 'Chaos in einfachen physikalischen Systemen' zur Verfügung. Der Versuch ist sowohl thematisch, als auch in der praktischen Durchführung recht flexibel konzipiert, so daß er an sich ändernde Bedürfnisse relativ leicht angepaßt werden kann. Um den Praktikanten die gewünschten Grundlagen der nichtlinearen Dynamik zu vermitteln, ist es wegen der Komplexität des Themas notwendig, ein etwas vom Gewohnten abweichendes Konzept anzuwenden. Dies beinhaltet zum einen die Verlagerung der Arbeitszeit der Studenten stärker auf die Vorbereitung des Versuchs und zum anderen der gegenüber anderen Versuchen notwendigerweise höhere Betreuungsaufwand. Desweiteren wurde eine offenere Formulierung bei der Aufgabenstellung gewählt, um dadurch eine eingehendere Beschäftigung mit der Materie zu erzielen und damit den Lernerfolg zu erhöhen. Außerdem wurde versucht, den Praktikumsversuch durch eine moderne computergesteuerte Ausstattung, leicht einsehbare Versuchsaufbauten und selbsterklärende, graphisch orientierte Meßprogramme für den Studenten möglichst attraktiv zu gestalten.

Literaturverzeichnis

- [1] U. Dekker, H. Thomas: *Die Chaostheorie*, Bild der Wissenschaft 1/1983, S. 63-75
- [2] R. W. Leven, B.-P. Koch, B. Pompe: *Chaos in dissipativen Systemen*, Akademie Verlag Berlin (1994)
- [3] G. Heinrichs: *Chaos*, Aulis Verlag, Köln (1992)
- [4] J. Argyris, G. Faust, M. Haase: *Die Erforschung des Chaos*, Vieweg, Braunschweig (1994)
- [5] P. Manneville, Y. Pomeau: *Intermittency and the Lorenz Model*, Phys. Let. **75** (1979) 1
- [6] A. Papoulis: *The Fourier integral and its applications*, McGraw Hill, New York (1962)
- [7] F. Takens: *Detecting strange attractors in turbulence* in Lecture Notes in Mathematics, Vol. **898**, eds. D.A. Rand, L.S. Young, Springer, Berlin (1981) 366
- [8] J. Peinke, J. Parisi, O.E. Rössler and R. Stoop: *Encounter with Chaos*, Springer, Berlin (1992)
- [9] Landau-Lifschitz: *Theoretische Physik Bd. I, Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin (1976) §29
- [10] T. Kapitaniak: *Chaotic oscillations in mechanical systems*, Manchester University Press, Manchester (1991)
- [11] J.R. Dormand, P.J. Price: *A family of embedded Runge-Kutta formulae*, J. Comp. Appl. Math. **7** (1980) 19
- [12] G. Heinzel: *Beliebig genau*, c't 8/1992, S. 172-185
- [13] D. Hirschmann: *Operationsverstärker Anwendung*, Franzis Verlag, München (1978)
- [14] U. Tietze, Ch. Schenk: *Halbleiter-Schaltungstechnik*, Springer, Berlin (1990)
- [15] M. Shinriki, M. Yamamoto, S. Mori: *Multimode Oscillations in a Modified Van-der-Pol Oscillator Containing a Positive Nonlinear Conductance*, Proc. IEEE **69** (1981) 394
- [16] T. Matsumoto, L.O. Chua and M. Komuro: IEEE Trans. Circuits Syst. **32** (1985) 797; Physica D **24** (1987) 97

- [17] A. Kittel, K. Pyragas and R. Richter: *Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos*, Phys. Rev. E **50** (1994) 262

Weitere Literatur:

- [18] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York (1993)
- [19] Praktikumsanleitung zum Versuch 'Nichtlineare Dynamik' der RWTH-Aachen.
- [20] R. Worg: *Deterministisches Chaos*, BI-Wissenschafts Verlag, Mannheim (1993)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mir im Laufe der Zeit, in der diese Arbeit entstanden ist, mit Rat und Tat zur Seite gestanden haben.

Ein besonderer Dank gilt zunächst Herrn Prof. Dr. Jürgen Parisi für die Möglichkeit diese Arbeit anzufertigen und seine Betreuung. Bei Achim Kittel bedanke ich mich für seine Bereitschaft mir bei meinen größeren und auch den kleinen Problemen jederzeit weiter zu helfen.

Desweiteren danke ich B. Reisner, P. Stagge, G. Heinz, M. Bünner, M. Goldbach und der ganze Arbeitsgruppe für die freundliche Atmosphäre und ihre Diskussionsbereitschaft zu physikalischen und auch nichtfachlichen Fragestellungen. Ebenso möchte ich meinem langjährigen Freund M. Cölle dafür danken, daß er stets ein offenes Ohr für mich hatte.

Zu guter letzt bedanke ich mich ganz besonders bei meinen Eltern, die mir das Studium ermöglichten und es mir damit überhaupt erst möglich machten diese Arbeit anfertigen zu können.