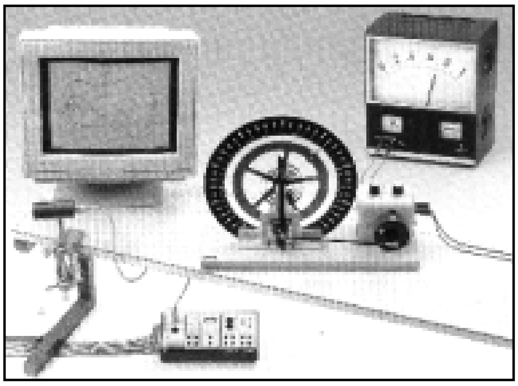
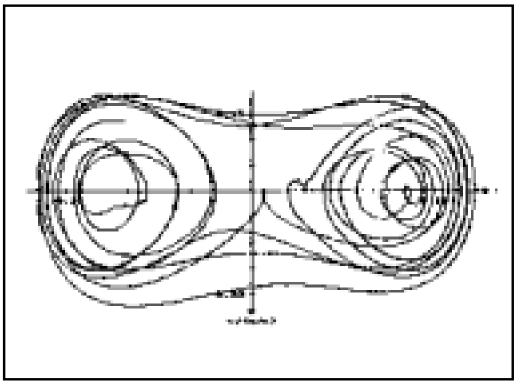
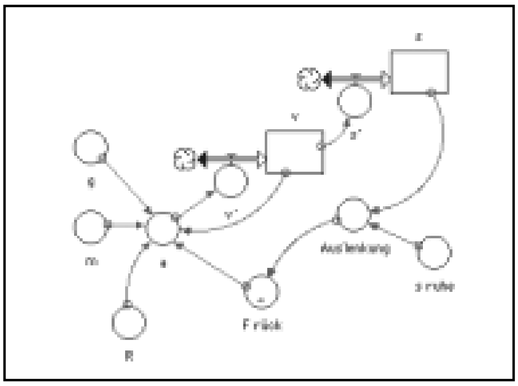
RheinlandPfalz

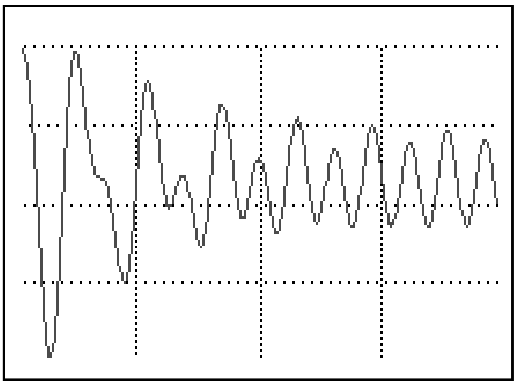
PZ-Information 3/2000 Physik

Nichtlineare dynamische Systeme und Chaos









Handreichung zum neuen Lehrplan Physik in der S II

In den "PZ-Informationen" werden Ergebnisse aus Arbeitsgruppen von Lehrerinnen und Lehrern aller Schularten veröffentlicht, die gemeinsam mit Fachwissenschaftlern und Fachdidaktikern erarbeitet worden sind. Hier werden Anregungen gegeben, wie auf der Grundlage des Lehrplans in der Schule gearbeitet werden kann. Im Mittelpunkt steht dabei immer der tägliche Unterricht und damit verbunden die Absicht, seine Vorbereitung und Durchführung zu bereichern. Für Lehrerinnen und Lehrer, die diese Anregungen aufgreifen und durch eigene Erfahrungen und Ergebnisse verändern oder ergänzen wollen, ist das Pädagogische Zentrum ein aufgeschlossener Partner, der besucht oder telefonisch erreicht werden kann.

Die "PZ-Informationen" erscheinen unregelmäßig. Eine chronologische Liste aller Veröffentlichungen des Pädagogischen Zentrums einschließlich einer inhaltlichen Kommentierung kann im PZ Bad Kreuznach angefordert werden (Rückporto). Unser Materialangebot finden Sie auch im Internet auf dem Landesbildungsserver unter folgender Adresse

http://bildung-rp.de/PZ

Herausgeber:

Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz (PZ)
Europaplatz 7 - 9, 55543 Bad Kreuznach
Postfach 2152, 55511 Bad Kreuznach
Telefon (0671) 84088-0
Telefax (0671) 8408810
e-mail: pzkh@sparkasse.net
URL: http://bildung-rp.de/PZ

Autor:

Josef Leisen, Staatl. Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien in Koblenz,
Leiter der Fachdidaktischen Kommission Physik - Sekundarstufe II

unter Mitarbeit der Mitglieder der Fachdidaktischen Kommission Physik:

Dietmar Fries, Gymnasium Birkenfeld
Dr. Jörg Luggen-Hölscher, Goethe-Gymnasium Germersheim

Skriptbearbeitung und Layout:

Josef Leisen

Redaktion:

Angela Euteneuer

Die vorliegende PZ-Veröffentlichung wird gegen eine Schutzgebühr von DM 5,00 zzgl. Versandkosten abgegeben.

ISSN 0938-748X

I. Didaktischer Teil

1. Zur Didaktik der Chaosphysik

1.1. Das didaktische Potenzial der Chaosphysik

Das Studium nichtlinearer dynamischer Systeme, die Erforschung chaotischer Phänomene und Systeme, das Eindringen in die bizarre Welt fraktaler Muster und die Erkenntnisse über Prozesse der Selbstorganisation haben den Wissenschaften einen transdisziplinären Blick verschafft, haben neue Forschungszweige eröffnet, haben paradigmatische Verschiebungen in klassischen Auffassungen bewirkt und zu vielfältigsten Anwendungen auf diversen Gebieten geführt. Die Chaostheorie hat die Sicht auf die Welt nachhaltig verändert, indem Unvorhersagbarkeiten, Unregelmäßigkeiten, Unstetigkeiten durch die neue Brille der Systemdynamik betrachtet werden.

Das didaktische Potenzial der Chaostheorie liegt in dem Kontrast zur traditionellen Betrachtung von Naturvorgängen. Es sind im Wesentlichen die folgenden Erkenntnisse:

- Eine längerfristige Vorhersage über das Verhalten mancher Systeme ist prinzipiell nicht möglich.
- Sehr kleine Änderungen bei bestimmten Systembedingungen können bedeutsame große Wirkungen hervorbringen (Sensitivität von den Anfangsbedingungen, schwache - starke Kausalität).
- Die linearen Näherungen der klassischen Physik bilden nur einen begrenzten Teil der Welt ab und nichtlineares Verhalten ist eher der Regelfall.
- Einerseits können sich komplexe Systeme bei bestimmten Systembedingungen ganz einfach verhalten (Ordnung aus Chaos) und andererseits können bereits einfache Systeme chaotisches Verhalten zeigen.
- Es gibt in den verschiedenen Wissenschaftsbereichen strukturelle Ähnlichkeiten.

Unter naturphilosophischem Aspekt kommt dem Unterricht in Chaostheorie eine wichtige Aufgabe zu. Der mit der Chaostheorie verbundene Paradigmenwechsel korrigiert das Bild des klassischen Determinismus.

Physikunterricht über Chaos ist unter erzieherischen Gesichtpunkten eine Gratwanderung. Physik gilt vielen Schülern als eine "verlässliche" Wissenschaft, die zu eindeutigen, objektiven Ergebnissen führt. Bei nachlässiger Behandlung des Themas Chaos könnte beim Schüler der falsche Eindruck erweckt werden, dass die Physik eine Wissenschaft mit Negativformulierungen ist: 'Man kann nichts berechnen. Chaos ist überall und alles ist chaotisch.'

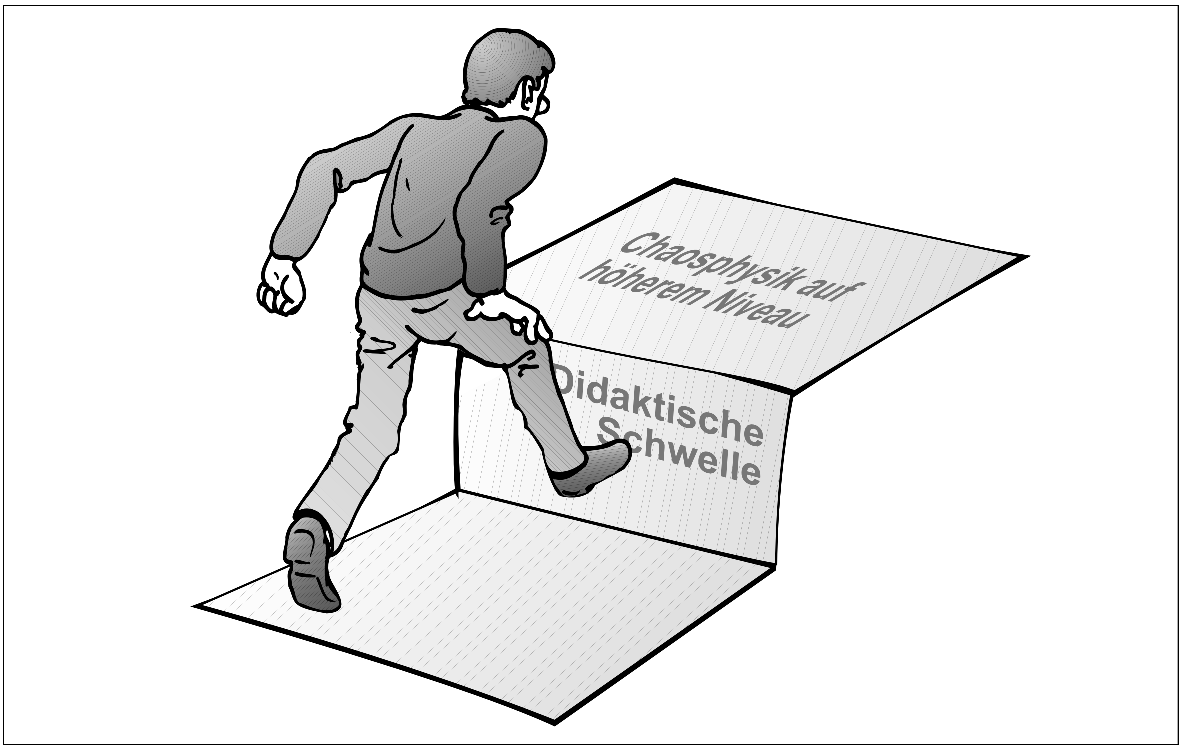
1.2. Die didaktische Schwelle zur Chaosphysik

Chaosphysik in der Schule, das sieht auf den ersten Blick vielversprechend aus:

- es gibt eine reichhaltige populärwissenschaftliche Literatur zu dem Thema,
- das Thema ist interdisziplinär und fächerübergreifend,
- das Thema hat klassische Züge und weist doch über das klassische Denken hinaus,
- zu dem Thema gibt es verblüffende und schöne Experimente und sehr schöne Bilder.

Trotz der didaktischen Diskussion zum Thema seit einem Jahrzehnt, hat die Chaosphysik noch keinen so rechten Platz im Physikunterricht gefunden.

Auf populärwissenschaftlichem Niveau lassen sich durchweg nette Chaosexperimente finden und auch sehr schöne fraktale Bilder zeichnen. Das aber reicht nicht für einen Unterricht in Chaosphysik, schon gar nicht im Leistungsfach. Ein tieferes Eindringen im Sinne einer intensiveren Beschäftigung erfordert ein begriffliches, mathematisches und experimentelles Inventar, das sich in der didaktischen Handhabung als komplex und sperrig erweist und das sich einer Elementarisierung stark widersetzt.



- Aus dem Spektrum der **Begriffe** seien einige aufgeführt:

Bifurkation, Phasenraum, Attraktor, sensitive Abhängigkeit, Nichtlinearität, exponentielles Fehlerwachstum, fraktale Dimension, multiplikative Selbstähnlichkeit, Selbstorganisation, Bäcker-Transformation, Mischung, starke und schwache Kausalität, ...

- Das notwendige **mathematische** Rüstzeug liegt für die Schule ebenfalls an der Grenze des

Möglichen:

Differentialgleichungen, Zeitdiagramme, Phasendiagramme, Frequenzspektrum, Feigenbaum-Diagramm, Poincaré-Schnitt, Rückabbildung, Ljapunov-Exponent, fraktale Dimension, ...

• Nicht zuletzt sind die **Experimente**, die eine quantitative Untersuchung des Chaos ermöglichen, experimentell aufwendig und schwierig in der Handhabung. Die sensitive Abhängigkeit erfordert vom Experimentator viel Geduld.

Oberhalb dieser didaktischen Schwelle sind eine Vielzahl unterrichtsmethodischer Hürden zu nehmen. Neben den didaktischen Schwierigkeiten in der Elementarisierung des Themas sind aber auch die fachlichen Probleme nicht von der Hand zu weisen. Die Chaosforschung selbst ist noch sehr im Fluss und dem Lehrer, der sich meist autodidaktisch in das Thema einarbeitet, stellen sich viele fachliche Fragen, die in der Literatur selten beantwortet werden.

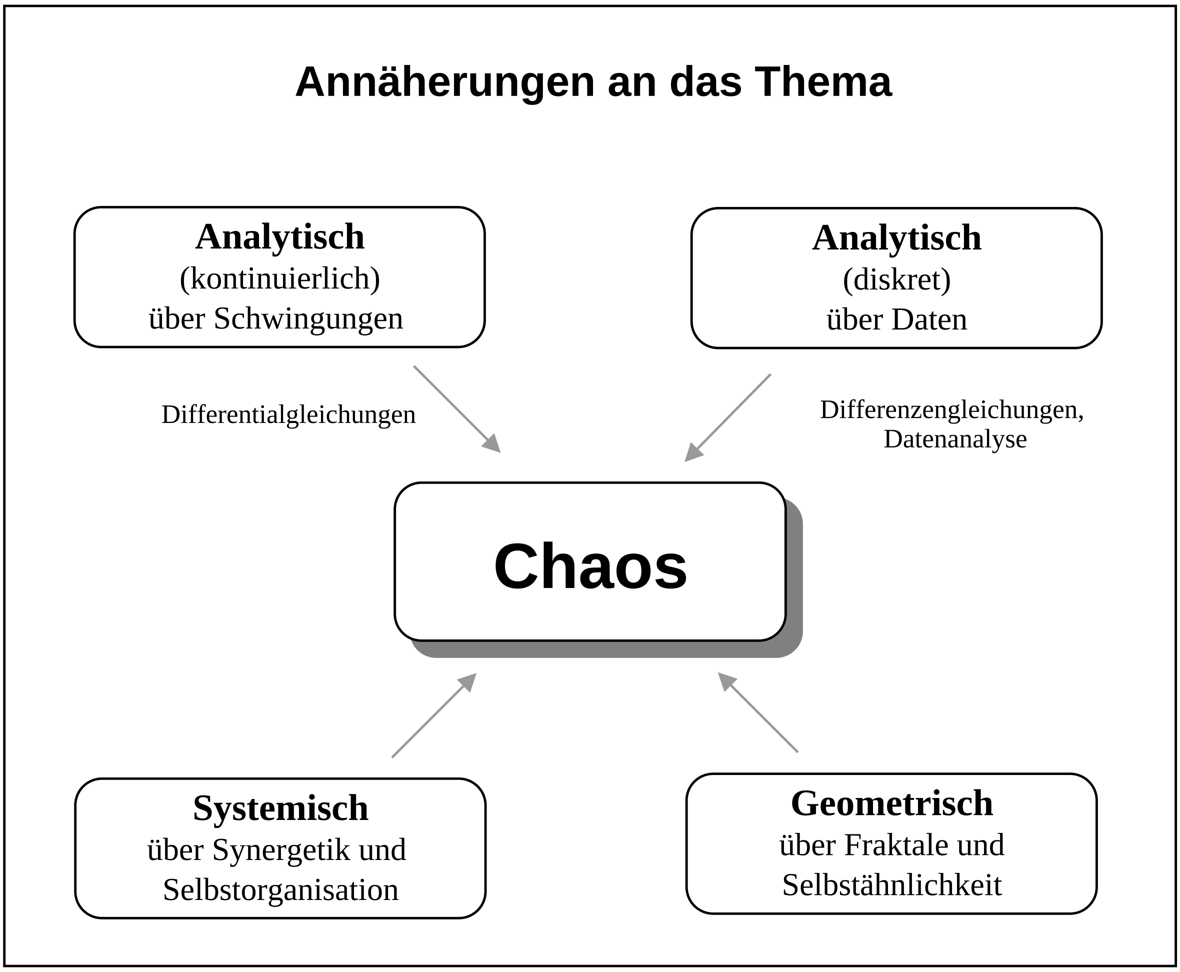
Fragen eines Lehrers über Chaosphysik

- Wie ist Chaos eigentlich definiert?
- Was hat Chaos mit Fraktalen zu tun? Bedingen sich beide gegenseitig?
- Was hat das Chaos bei der logistischen Gleichung mit dem Chaos am Pohlschen Rad zu tun?
- Da schwingt z.B. ein Pendel. Wie erkenne ich, ob das nur kompliziert regelmäßig, chaotisch oder stochastisch schwingt?
- Gibt es denn keine einfachen Chaosexperimente, an denen man quantitative Messungen durchführen kann?
- Gibt es denn kein exemplarisches Experiment, an dem man ‚alles‘ zeigen kann?
- Warum gibt es denn sowenig Chaos im Alltag?
- Was ist der Unterschied zwischen stochastischem Verhalten und chaotischem Verhalten?
- Was ist eigentlich deterministisch am deterministischen Chaos?
- Was sind die begrifflichen Unterschiede zwischen nichtdeterministisch, nichtberechenbar, stochastisch, chaotisch?
- Ist die Chaostheorie ein neues Paradigma?
- Was hat Synergetik mit Chaos zu tun?
- Was hat das makroskopische Chaos mit dem Quantenchaos zu tun?
- Was hat Lorenz‘ Schmetterlingseffekt mit Heisenbergs Unschärfe zu tun?
- Was ist Nichtlinearität?
- Was hat das Chaos der Hasen-Population mit dem des Pohlschen Rades gemein?
- Was hat Chaosphysik in der Schule zu suchen?

Das folgende Zitat zeigt, dass man aber mit seinen Fragen in guter Gesellschaft ist.

„Ist es möglich, eine einzige Definition für Chaos zu geben, aus der alle anderen folgen? Die Forschung hierzu ist weitgehend noch in der Phase der Beschreibung von Teilgebieten, der Suche nach generellen Aussagen. Verbindungen zwischen verschiedenen Definitionen der Kenngrößen für chaotisches Verhalten sind häufig durch numerische Berechnungen oder für einzelne Beispiele glaubhaft dargelegt; eine vollständige Theorie existiert noch nicht. ... aus den obengenannten Gründen keine notwendige und hinreichende Definition von deterministischem Chaos möglich ist...“ ([1], S.147)

Wenn dem so ist, stellt sich die Frage, ob Chaosphysik elementarisierbar ist und in die Schule gehört.



Das Diagramm zeigt Annäherungen an das Thema Chaos. Eine ‚**analytische Annäherung**' geschieht über analytische Untersuchungsmethoden, die zum Teil der klassischen Physik entspringen. Als Standardbeispiele kontinuierlicher dynamischer Systeme werden vorzugsweise nichtlineare Schwingungen untersucht, die mit Differenzialgleichungen, die den Physikern sehr vertraut sind, modelliert und beschrieben werden.
Ein anderer analytischer Weg geht über ‚diskrete Vorgänge und Phänomene' und verwendet diskrete Abbildungen, z.B. Differenzengleichungen. Als Standardbeispiel wird vorzugsweise die logistische Funktion herangezogen. Die Forschung verwendet komplexe und mathematisch aufwendige Methoden der Datenanalyse (z.B. Spektralanalyse, Zeitreihencharakterisierung, Datenrekonstruktion, Ljapunov-Analyse, stochastische Methoden).

Sowohl kontinuierliche Differenzialgleichungen als auch diskrete Differenzengleichungen führen in der Schule schnell an formal-mathematische Grenzen, wenn auch die logistische Funktion einen frappierend schnellen Zugang eröffnet. Interessant ist aber folgendes Zitat:

„*Es dauerte ca. 10 Jahre, ein solch einfaches Modell wie die logistische Gleichung vollständig zu verstehen.*" ([2], S. 53).

Eine ‚**geometrische Annäherung**' an das Thema kann aus der Mathematik heraus, unter Verwendung des Computers, über die fraktale Geometrie erfolgen. Dieser Weg wird u. a. von der Gruppe um Peitgen beschritten und propagiert. Die Vielzahl der fraktalen Wachstumsvorgänge in der Natur und der fraktalen Muster liefert reichlich Anschauungsmaterial. So reizvoll dieser Weg auch ist, so zeigt auch er fachliche Klippen:

„Chaos und Fraktale bedingen sich nicht gegenseitig." ([3], S. 44)

Eine weitere für die Physik interessante Annäherung an das Thema Chaos ist die ‚**systemische Annäherung**'. Sie kann über die Synergetik in Umkehrung der Fragestellung erfolgen, nämlich: ‚Wie entsteht Ordnung aus Chaos?' Hier stehen Selbstorganisationsvorgänge und die Herausbildung von Ordnungsstrukturen im Vordergrund, für die der Laser das am besten erforschte Modellbeispiel darstellt. Das didaktische Potenzial und die Faszination der Synergetik liegen in der Vereinheitlichung diverser Phänomene und Ideen unter einem globalen Gesichtspunkt.

Aber auch hier, wie bei allen anderen Annäherungen, kann das didaktische Potenzial erst ausgespielt werden, wenn die didaktische Schwelle überschritten ist und wenn darüber hinaus etliche begriffliche, mathematische und experimentelle Hürden genommen sind.

1.3 Deterministisches Chaos im Lehrplan Physik

Angesichts der skizzierten didaktischen Schwelle zur Chaosphysik stellt sich die Frage, ob und wie diese in der Schule überwindbar ist. Falls man eine gewisse fachliche Höhe erreichen will, kann sie, bildlich gesprochen, nicht in einem Schritt, sondern nur in mehreren Schritten überwunden werden.

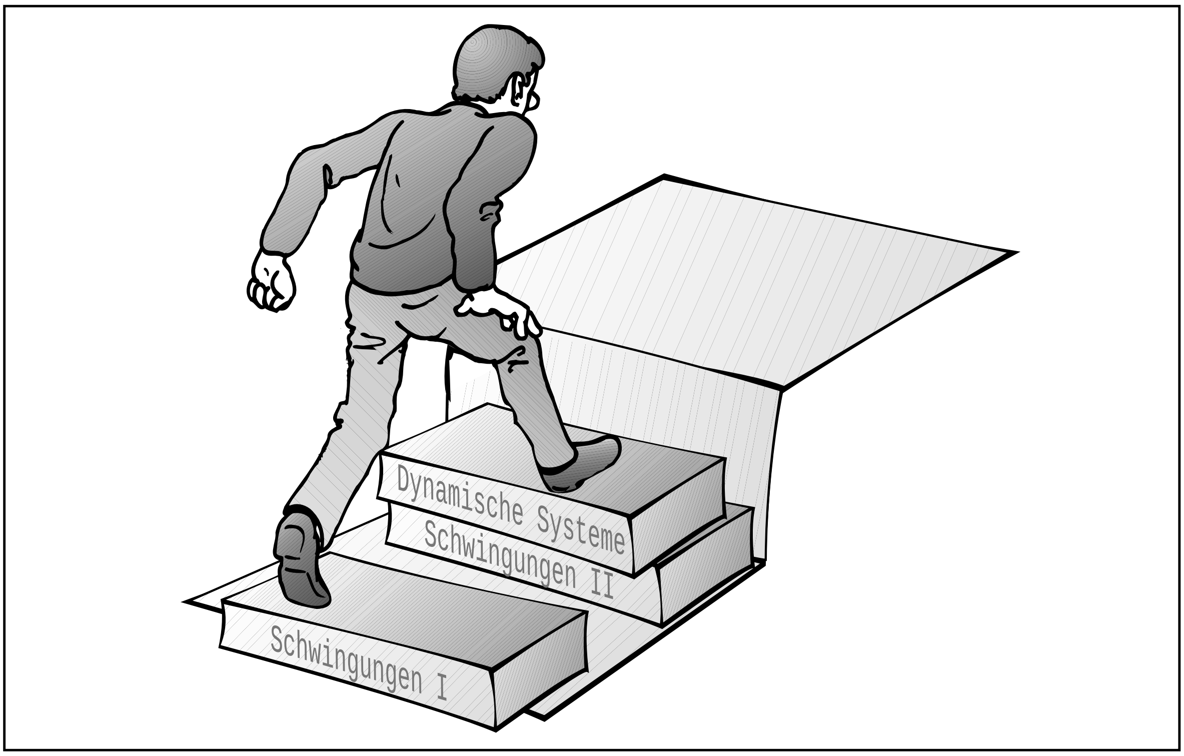
Der analytische Weg über Schwingungen bietet die besten Möglichkeiten, die Thematik zeitökonomisch durch Vorstufen vorzubereiten. Nichtlineare chaotische Schwingungen sind am besten an den herkömmlichen Physikunterricht anschlussfähig. Alle anderen Wege sind inhaltlich, begrifflich und konzeptionell Zusatzstoff und belasten das ohnehin enge Zeitbudget zu stark. Bei aller Wertschätzung für diese Wege, müssten andere traditionelle Themen gekürzt werden oder gar wegfallen. Der analytische Weg über Schwingungen hingegen kann das Thema Chaos mit unverzichtbarem Pflichtstoff gut vorbereiten. Dabei muss schon beim Einstieg in das Thema 'Schwingungen' immer das thematische Ende 'chaotische Schwingungen' mitgedacht werden. Das bedeutet: Das Thema 'Schwingungen' muss konsequent von Anfang an auf das Ende 'Chaos' hin konzipiert werden.

Dazu muss man zunächst fragen, welche unverzichtbaren Begriffe, Methoden und Teilthemen vorbereitend behandelt werden müssen.

- Differenzialgleichungen müssen explizit thematisiert, angesetzt und gelöst werden.
- Nichtlinearitäten und Dämpfungen müssen thematisiert und behandelt werden.
- Erzwungene Schwingungen müssen thematisiert und behandelt werden.
- Zeitdiagramme und Phasendiagramme sind unverzichtbare Hilfsmittel.
- Ohne Modellbildung, Rechnereinsatz und Programmieraufwand ist eine Behandlung nicht sinnvoll.

Die Liste macht deutlich, dass eine Behandlung des Themas Chaos zeitlich nur möglich ist, wenn im Vorfeld des Unterrichts entsprechende Zuarbeit geleistet wird. Diese Zuarbeit ist bei dem im Lehrplan gewählten Weg über Schwingungen möglich. Schwingungen gehören zum Pflichtstoff und das Thema Chaos kann mit unverzichtbarem Basiswissen vorbereitet werden. Darüber hinaus findet eine sinnvolle Anwendung, Vertiefung und ein Ausbau des Themas statt.

Der Lehrplan Physik, der nach dem Bausteinkonzept konzipiert ist, bietet im Leistungsfach einen **Wahlbaustein** ‚Nichtlineare dynamische Systeme', sowie den **Pflichtbaustein** ‚Mechanische Schwingungen I' und den **Wahlbaustein** ‚Mechanische Schwingungen II' als Hinführung an. Bildlich gesprochen liegt der Baustein ‚Nichtlineare dynamische Systeme' oberhalb der didaktischen Schwelle, während die beiden andern Stufen darstellen, um die didaktische Schwelle zu überschreiten.



Die Grundlagen werden im Pflichtbaustein ‚Mechanische Schwingungen I' gelegt. Im Wahlbaustein ‚Mechanische Schwingungen II' erfolgt die zweite Stufe. Im Blick auf die nichtlinearen dynamischen Systeme werden hier die anharmonischen eindimensionalen Schwingungen behandelt. Aber nicht nur begriffliche und inhaltliche Vorarbeit ist im vorangehenden Pflichtstoff möglich, sondern auch eine methodische Zuarbeit. Man wird nämlich die Schwingungsbeispiele so wählen, dass

- sie später anharmonisch erweiterbar sind
- zu erzwungenen Schwingungen ausbaubar sind
- leicht modellierbar und programmierbar sind
- mit Differenzialgleichungen nachvollziehbar beschreibbar sind

- in Zeitdiagrammen und Phasendiagrammen interpretierbar sind
- und schließlich experimentell zugänglich sind.

Leider gibt es nicht das eine ‚Wunderbeispiel' anhand dessen man exemplarisch alles zeigen könnte. Man kann das Ziel aber erreichen, indem man:

- mehrere Schwingungsbeispiele geschickt auswählt und aufeinander abstimmt
- Modellbildung und Differenzialgleichungen rechtzeitig einführt
- Modellbildungssysteme als Differenzialgleichungslöser einsetzt
- die Begriffe und Darstellungsmethoden (z.B. Phasendiagramm) an der passenden Stelle angeht.

Im Leistungsfach ist ein stufenförmiges Vorgehen möglich, an dessen Ende ein angemessener und fundierter Einblick in die Chaostheorie steht.

Im Grundfach kann dieser Weg wegen des begrifflichen und formalen Aufwandes nicht gegangen werden. Der Baustein ‚Chaos und Fraktale' ist ein Wahlbaustein und zielt auf Einblicke in die Thematik ab. Bildlich gesprochen verbleibt der Unterricht zum Thema auf der unteren Ebene, ohne die didaktische Schwelle zu überwinden. Der Unterricht befähigt den Schüler, die Schwelle aus erhöhter Sicht zu überblicken.

Bausteine im Lehrplan des Leistungsfachs

Mechanische Schwingungen I	10
- Schwingungsphänomene und beschreibende Größen - Bewegungsgleichung und Bewegungsgesetze der freien linearen Schwingung - Schwingungsdauerformel; Energie des linearen Oszillators	• Ein solides Grundwissen vermitteln. • Die Rolle der Mathematik kann hier eindrucksvoll zur Einsicht gebracht werden, indem die Thematik mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der Analysis angegangen wird. Mathematisieren, Formelinterpretation und Analogiedenken im Sinne des Methodenlernens fördern. • Praktikum: Schwingungsdauer

Mechanische Schwingungen II	10
- freie gedämpfte Schwingungen - Schwingungsformen (erzwungene Schwingungen; Resonanz; anharmonische Schwingungen; Überlagerung von Schwingungen; gekoppelte Schwingungen)	• Ein strukturierendes Überblickwissen vermitteln. • Schwerpunkte setzen und eine Auswahl treffen. Die Thematik hat einen hohen Anwendungsbezug und eignet sich als Vorbereitung für den Baustein **Nichtlineare dynamische Systeme**. Modellbildungssysteme nutzen.

Nichtlineare dynamische Systeme	10
- Beispiele nichtlinearer dynamischer Systeme; Chaosphänomene - Merkmale und Systembedingungen; Beschreibung chaotischer Phänomene - Strukturen im Chaos; Sensitivität	• Einen Überblick mit einem vertiefteren Einblick anhand exemplarischer Beispiele geben. • Beim innerphysikalischen Zugang über Schwingungen die Differenzialgleichungen mit Rechnern bearbeiten. Ein fachübergreifender Zugang über allgemeine chaotische Systeme führt vorzugsweise zu einer diskreten Darstellung mittels Differenzengleichungen.

Baustein im Lehrplan des Grundfachs

Chaos und Fraktale	10
- Beispiele von Chaosphänomenen und fraktalen Strukturen - Merkmale und Systembedingungen (Bifurkation, Nichtlinearität, Sensitivität, Strukturen im Chaos) chaotischer Systeme - strukturelle Ähnlichkeiten in verschiedenen Bereichen	• Einen kontrastiven Einblick in Phänomene und in den transdisziplinären Charakter der Thematik geben. • Auf eine dem Grundfach unangemessene Formalisierung verzichten. Die Beschäftigung mit der logistischen Gleichung bietet sich an. Fächerübergreifende Bezüge der Thematik nutzen.

2. Experimente zur Chaosphysik

An Experimenten zur Chaosphysik besteht kein Mangel. Die sicher noch unvollständige Übersicht zeigt 32 Experimente sehr unterschiedlichen Charakters. Das Spektrum der Experimente reicht von Naturphänomenen über einfache Freihandexperimente bis hin zu aufwendigen Messexperimenten. In der Übersicht sind die Experimente zunächst thematisch geordnet in solche, die zum Deterministischen Chaos gehören, solche zur Selbstorganisation-Synergetik und solche zur Thematik Fraktales Wachstum. Die Einteilung entspricht den an anderer Stelle skizzierten Annäherungen an das Thema Chaos; nämlich der analytischen, der systemischen und der geometrischen Annäherung.

Der Begriff Deterministisches Chaos erscheint zunächst widersprüchlich, denn determiniert bedeutet festgelegt, bestimmt, und man assoziiert damit Berechenbarkeit. Mit dem Begriff Chaos assoziiert man hingegen Unbestimmtheit und Nichtberechenbarkeit. Chaotische Prozesse sind in ihrem Verhalten nicht vohersagbar und nicht berechenbar, aber sie sind determiniert in dem Sinne, dass die zugrundeliegenden Gleichungen (z. B. Newtonsche Gesetze, Differenzialgleichungen) eindeutig den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung festlegen. Das chaotische Verhalten entsteht dadurch, dass diese Systeme unter bestimmten Bedingungen, bedingt durch die Nichtlinearitäten, sehr sensibel (sensitive Abhängigkeit, exponentielles Fehlerwachstum) gegenüber Startbedingungen und Störungen sein können, sodass eine längerfristige Vorhersage nicht möglich ist.

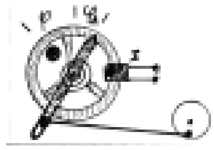
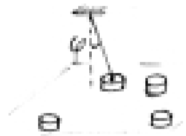
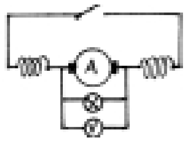
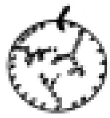
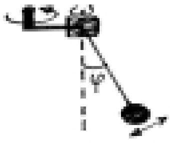
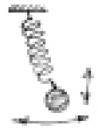
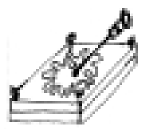
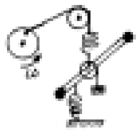
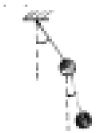
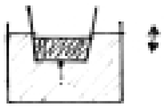
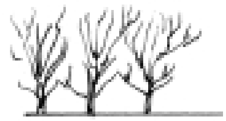
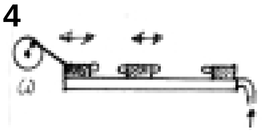
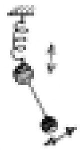
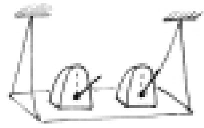
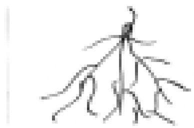
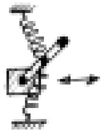
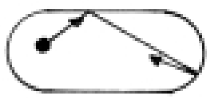
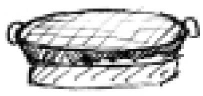
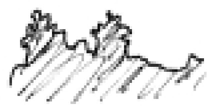
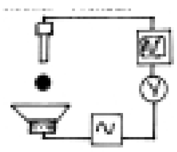
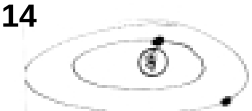
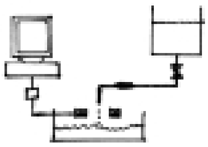
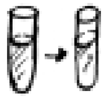
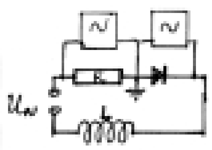
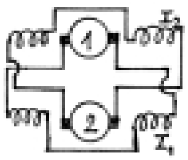
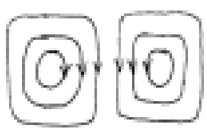
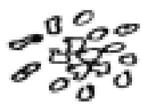
Die Phänomene und Experimente zum Deterministischen Chaos können kontinuierlichen (1,2,3,5,8,9,10,11,12,14,15,16) oder diskreten (4,6,7,13) Charakter haben. Die beschreibenden deterministischen Gesetze sind im kontinuierlichen Fall Differenzialgleichungen und im diskreten Fall sind es Differenzengleichungen. Die 16 Experimente sind in zwei Gruppen, nämlich in eindimensionale Schwingungen und in zweidimensionale Schwingungen eingeteilt. Allen eindimensionalen Schwingungen ist ein äußerer Antrieb gemeinsam. Bei den zweidimensionalen kann darauf verzichtet werden. Die Begründung dafür liegt in einer der notwendigen Bedingungen für das Entstehen von chaotischem Verhalten: Das System muss mindestens drei effektive Freiheitsgrade haben.

„Gibt es denn keine einfachen Experimente, an denen man das Chaos leicht zeigen kann?“ Die Antwort auf diese oft gestellte Frage lautet ‚nein‘ und liegt in der Natur der Sache.

Ein schwingendes System, das chaosfähig ist, muss drei **Bedingungen** erfüllen:

- Es muss **nichtlinear** sein, damit das starke Kausalitätsprinzip verletzt ist.
- Es muss eine **Stelle sensitiver Abhängigkeit** von den Startbedingungen vorliegen. (Die liegt besonders dann vor, wenn die Potenzialfunktion ein lokales Maximum hat, etwa ein W-Potenzial ist.)
- Es muss **mindestens drei Freiheitsgrade** haben, damit es bei den Trajektorien im Phasenraum keine Überschneidungen gibt, die der Determinismus verbietet.

Das sind notwendige, aber keine hinreichenden Bedingungen an chaosfähige Systeme. Die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ist die Anzahl der Freiheitsgrade, die den Phasenraum

Deterministische Chaos		**Selbstorganisation Synergetik**	**Fraktales Wachstum**
eindimensionale Schwingungen	zweidimensionale Schwingungen		
Pohlsches Rad **1** 	Magnetpendel **9** 	Dynamo **17** 	Dentritisches Wachstum **25** 
Karussellpendel **2** 	Faden-Feder-Pendel **10** 	Dampf-Jet-Boot **18** 	Hele-Shaw-Zelle **26** 
Getriebenes Pendel **3** 	Doppelpendel **11** 	Salzwasser-Oszillationen **19** 	Eisen-Mangan-Ausscheidung **27** 
Getriebener Luftkissenoszillator **4** 	Feder-Stab-Pendel **12** 	Gekoppelte Metronome **20** 	Lichtenberg-Figuren **28** 
Getriebener Duffing-Oszillator **5** 	Billardsysteme **13** 	Bénard-Konvektion **21** 	Küstenlinien **29** 
Chaotischer Prellball **6** 	Dreikörperproblem **14** 	Taylor-Zylinder **22** 	Strukturen im Sand **30** 
Tropfendes Wasser **7** 	Wasserrad **15** 	Bélousov-Zhabotinsky-Reak. **23** 	Astwachstum **31** 
Anharmon. elektr. Oszillator **8** 	Rikitake-Modell **16** 	Lorenz-Modell **24** 	Bakterienwachstum **32** 

bilden, vermindert um die Anzahl der im System geltenden Erhaltungssätze. Es ist die minimale Anzahl von Variablen, mit denen man das System beschreiben kann.

Bleibt man bei den eindimensionalen Schwingungen, so erfüllt die erzwungene-anharmonisch-gedämpfte Schwingung entsprechenden Potenzials gerade diese Bedingungen. Unterhalb dieser Kategorie gibt es im eindimensionalen Bereich kein Chaos; denn eindimensionale Schwingungen haben als Freiheitsgrade die Ortskoordinate, die Geschwindigkeitskoordinate und brauchen als dritten Freiheitsgrad den äußeren Antrieb (genauer die Phase desselben).

Bei zweidimensionalen Schwingungen kann man auf den äußeren Antrieb verzichten, denn diese haben zwei Ortskoordinaten und zwei Geschwindigkeitskoordinaten, also vier Freiheitsgrade, die sich wegen des Energieerhaltungssatzes auf drei effektive Freiheitsgrade reduzieren.

Der Verzicht auf den äußeren Antrieb bringt experimentelle Vorteile, die aber in der Regel mit gekoppelten Differenzialgleichungen erkauft werden, welche sich einer Behandlung auf der Schule meistens entziehen (z. B. Langrange-Formalismus zur Lösung der DGLen des Doppelpendels Nr. 11). Deshalb haben fast alle Experimente zu den zweidimensionalen Schwingungen mehr qualitativ-demonstrierenden Charakter.

Der äußere Antrieb bei den eindimensionalen Schwingungen erschwert den experimentellen Aufbau und die Handhabung. Als Kontrollparameter wird meistens die Phase der Anregung gewählt, die oft schwierig zu ermitteln ist.

Die mathematische Behandlung der Iterationsgleichungen der diskreten Vorgänge (4,6,7,13) ist in der Regel nicht einfach. Bei Verzicht auf eine mathematische Auswertung verbleiben diese dann im qualitativ-demonstrierenden Bereich.

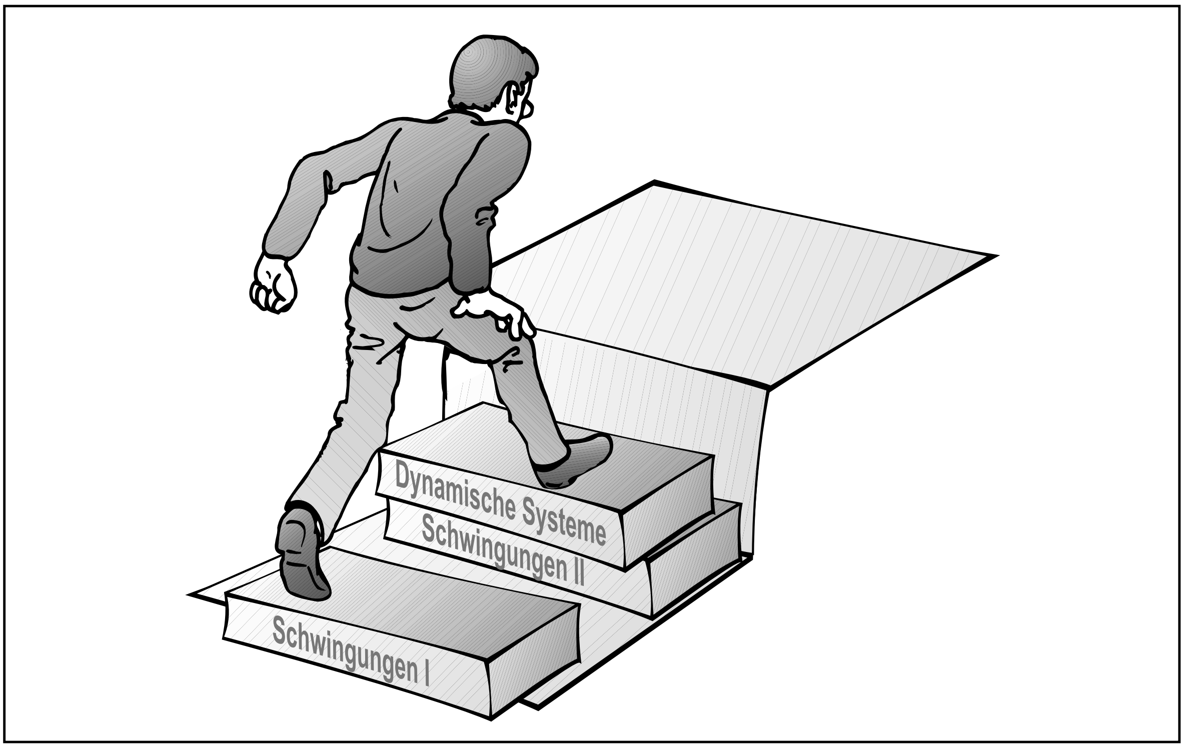
Allen Experimenten ist gemeinsam, dass sie in der Messwerterfassung und in der quantitativen Auswertung sperrig sind. Das Pohlsche Rad (1) ist eines der wenigen Experimente, das sich in der Schule einer experimentellen Auswertung als zugänglich erweist.

Die Experimente zur Selbstorganisation und insbesondere jene zum fraktalen Wachstum haben vornehmlich demonstrierenden und illustrierenden Charakter.

II. Unterrichtspraktischer Teil

1. Ein Unterrichtsvorschlag zu nichtlinearen dynamischen Systemen und Chaosphysik

Der Lehrplan Physik, der nach dem Bausteinkonzept konzipiert ist, bietet im Leistungsfach einen **Wahlbaustein** 'Nichtlineare dynamische Systeme' sowie den **Pflichtbaustein** ‚Mechanische Schwingungen I‘ und den **Wahlbaustein** ‚Mechanische Schwingungen II‘ als Hinführung an. Bildlich gesprochen liegt der Baustein ‚Nichtlineare dynamische Systeme‘ innerhalb der didaktischen Schwelle, während die beiden andern Stufen darstellen, um die didaktische Schwelle zu überschreiten.



Die Grundlagen werden im Pflichtbaustein ‚Mechanische Schwingungen I‘ gelegt. Im Wahlbaustein ‚Mechanische Schwingungen II‘ erfolgt die zweite Stufe. Hier werden die anharmonischen eindimensionalen Schwingungen behandelt, die bei den nichtlinearen dynamischen Systemen gebraucht werden. Aber nicht nur begriffliche und inhaltliche Vorarbeit ist im vorangehenden Pflichtstoff möglich, sondern auch eine arbeitsmethodische Zuarbeit, nämlich die Kenntnis der Differenzialgleichung, der Umgang mit Zeit- und Phasendiagrammen und die Kenntnis eines Modellbildungssystems.

Bausteine im Lehrplan des Leistungsfachs

Mechanische Schwingungen I	**10**
- Schwingungsphänomene und beschreibende Größen - Bewegungsgleichung und Bewegungsgesetze der freien linearen Schwingung - Schwingungsdauerformel; Energie des linearen Oszillators	• Ein solides Grundwissen vermitteln. • Die Rolle der Mathematik kann hier eindrucksvoll zur Einsicht gebracht werden, indem die Thematik mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der Analysis angegangen wird. Mathematisieren, Formelinterpretation und Analogiedenken im Sinne des Methodenlernens fördern. • Praktikum: Schwingungsdauer

Mechanische Schwingungen II	**10**
- freie gedämpfte Schwingungen - Schwingungsformen (erzwungene Schwingungen; Resonanz; anharmonische Schwingungen; Überlagerung von Schwingungen; gekoppelte Schwingungen)	• Ein strukturierendes Überblickwissen vermitteln. • Schwerpunkte setzen und eine Auswahl treffen. Die Thematik hat einen hohen Anwendungsbezug und eignet sich als Vorbereitung für den Baustein **Nichtlineare dynamische Systeme**. Modellbildungssysteme nutzen.

Nichtlineare dynamische Systeme	**10**
- Beispiele nichtlinearer dynamischer Systeme; Chaosphänomene - Merkmale und Systembedingungen; Beschreibung chaotischer Phänomene - Strukturen im Chaos; Sensitivität	• Einen Überblick mit einem vertiefteren Einblick anhand exemplarischer Beispiele geben. • Beim innerphysikalischen Zugang über Schwingungen die Differenzialgleichungen mit Rechnern bearbeiten. Ein fachübergreifender Zugang über allgemeine chaotische Systeme führt vorzugsweise zu einer diskreten Darstellung mittels Differenzengleichungen.

Schon beim Inangriffnehmen des Themebereiches Schwingungen muss man gezielt auf das Ende hinsteuern. Die Reichhaltigkeit der Schwingungsphänomene verlockt dazu, vom direkten Ansteuern abzukommen. Das allmähliche Aufsteigen zu den chaotischen Schwingungsphänomenen kann durch geschickte Zuarbeit in den einzelnen Bausteinen sanft aber zügig erfolgen. Da in dem vorliegenden Unterrichtsvorschlag ein Modellbildungssystem ein wichtiges Forschungs- und Arbeitsmittel darstellt, ist eine Einführung und Nutzung schon im Bereich der Mechanik sinnvoll.

Die Zuarbeit ist folgendermaßen auf die drei Bausteine aufgeteilt:

Mechanische Schwingungen I	**10**
• Mehrere harmonische Schwingungsbeispiele geschickt auswählen und aufeinander abstimmen • DGLen einführen • Begriffe und Darstellungsmethoden angehen	

Mechanische Schwingungen II	**10**
• Schwingungsbeispiele anharmonisch ausbauen • DGLen entsprechend erweitern • Modellbildungssysteme als DGL-Löser einsetzen • Begriffe und Darstellungsmethoden einüben	

Nichtlineare dynamische Systeme	**10**
• Schwingungsbeispiele chaotisch ausbauen • DGLen entsprechend erweitern • Modellbildungssysteme als DGL-Löser einsetzen • Begriffe und Darstellungsmethoden nutzen	

1. Unterrichtseinheit: Kinematik und Dynamik der freien-harmonischen-ungedämpften-eindimensionalen Schwingung

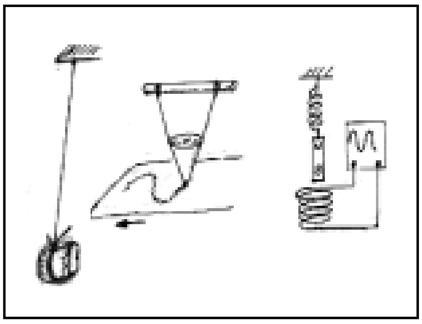
Didaktischer Kommentar:

Der Unterricht startet konventionell mit Faden- und Federpendeln unterschiedlichster Ausführung (großes Steinpendel, kleine Pendel, Federpendel verschiedener Härte), setzt aber folgende Schwerpunkte:

- Verzicht auf eine langatmige Erarbeitung kinematischer Begriffe und Bewegungsgesetze zugunsten eines raschen Umgangs damit.
- Verzicht auf experimentell-induktive Herleitungen zugunsten theoretischer Ableitungen.
- Die Rolle der Mathematik wird hier eindrucksvoll zur Einsicht gebracht, indem die Thematik mit den zur Verfügung stehenden Mitteln der Analysis angegangen wird.
- Die Reihenfolge von kinematischer und dynamischer Beschreibung ist nicht zwingend und hängt von den formal-analytischen Erfahrungen des Kurses ab.

Unterrichtsskizze:

1. Schwingungsphänomene und Aufzeichnungsverfahren



- An Aufzeichnungsverfahren bieten sich an:

- Sandtrichter mit gezogener Papierunterlage,
- schwingender Stabmagnet über einer Spule mit Oszilloskop,
- Schreiber oder Bewegungsmesswandler mit Interface.

2. Kinematische Beschreibung der freien-harmonischen Schwingung

$$s(t) = s_0 \sin\omega t$$

$$s'(t) = \omega s_0 \cos\omega t$$

$$s''(t) = -\omega^2 s_0 \sin\omega t$$

• Es empfiehlt sich, die Schüler das eine oder andere Zeitdiagramm mit einem nicht grafikfähigen Taschenrechner berechnen und zeichnen zu lassen. Das bereitet den späteren Umgang mit Diagrammen aus dem Rechner vor. Die Schüler sollten hier im formalen Umgang mit den Mitteln der Analysis beim Bearbeiten kinematischer und dynamischer Schwingungsprobleme eingeübt werden.

3. Dynamische Beschreibung der freien-harmonischen Schwingung

DGL:

$$m \bullet s'' + D \bullet s = 0$$

• Die Dynamik der harmonischen Schwingung, das lineare Kraftgesetz und die Schwingungsdauerformel können formal angegangen und experimentell begleitet werden. Auf die Differenzialgleichung sollte hier eingegangen werden. Auf eine überdehnte, langatmige Erarbeitung sollte man allerdings zugunsten einer intensiveren Übung verzichten.

2. Unterrichtseinheit: Vertiefungen und Übungen zur freien harmonischen Schwingung

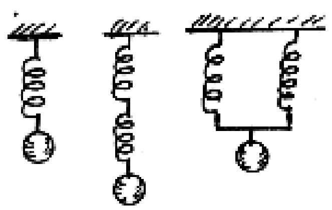
Didaktischer Kommentar:

Der rasche Zugang zur Theorie der harmonischen Schwingung schafft Raum für Vertiefungen und Übungen. Die Intention ist:

- Vertiefung, Übung und Erhöhung des Beschäftigungsgrades mit Schwingungsphänomenen und Schwingungsbegriffen.
- Selbsttätige Auseinandersetzung mit Schwingungsphänomenen und Schwingungsbegriffen.

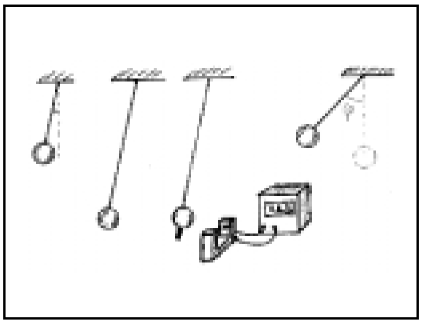
Unterrichtsskizze:

1. Übungen zu den Bewegungsgesetzen und zur Schwingungsdauerformel



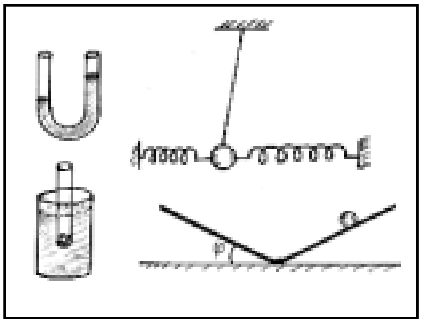
• An Federpendelkombinationen (Parallel-, Reihenschaltung) und Fadenpendelvariationen können Begriffe, Schwingungsdauer- und Bewegungsgesetze wiederholt und eingeübt werden.

2. Freie-harmonische-gedämpfte Schwingung



• Die Schwingungen in den Experimenten sind allesamt gedämpft. Ohne nähere Begründungen können hier zwei Mitteilungen gemacht werden:
- Die Schwingungsdauer einer harmonischen (!) Schwingung ist amplitudenunabhängig.
- Die Dämpfungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit mit einer e-Funktion als Einhüllende.

3. Arbeitsteiliges Praktikum



• Ein arbeitsteiliges Praktikum kann die Einheit abschließen. Folgende Beispiele bieten sich an:
- schwingende U-Röhre,
- Schwingungstaucher,
- Feder-Faden-Pendel,
- doppeltschiefe Ebene. Diese Beispiele bilden gleichzeitig den Übergang zur nächsten und übernächsten Unterrichtseinheit.

3. Unterrichtseinheit: Nichtlineare freie Schwingungen im Experiment

Didaktischer Kommentar:

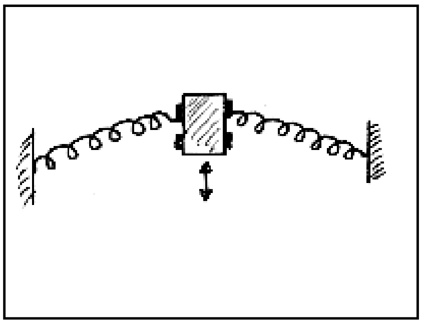
Mit der doppeltschiefen Ebene liegt das Beispiel einer anharmonischen Schwingung vor, deren DGL aufgestellt, aber nicht (geschlossen) gelöst werden kann. Weitere Beispiele anharmonischer Schwingungen sind:
- das Zwei-Feder-Quer-Pendel,
- der Jo-Jo-Wagen,
- das Fadenpendel mit großer Amplitude
- das Gummipendel.

Das Zwei-Feder-Quer-Pendel bildet für den weiteren Unterrichtsgang ein Standardbeispiel, auf das immer wieder Bezug genommen wird. Die DGL lässt sich im Unterricht aufstellen (Pythagoras, Sinus), aber nicht lösen.

Die Kennlinie des Gummipendels, das Kraft-Weg-Gesetz, wird experimentell für ein Gummiband (Konfektionsgummi) aufgenommen und zeigt sich als nichtlinear. Hier liegt ein Beispiel vor, dessen DGL nicht einmal geschlossen angegeben werden kann. Um die Zeitdiagramme dieser anharmonischen Schwingungen zu erhalten, muss man zu neuen Verfahren greifen. Das ist die Motivation für die nachfolgende Unterrichtseinheit.

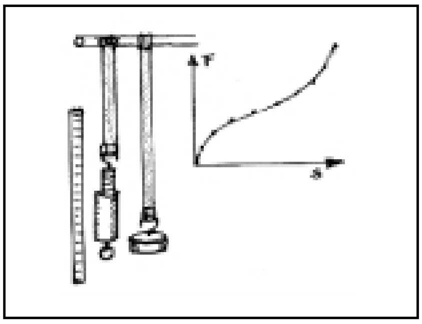
Unterrichtsskizze:

1. Das Zwei-Zugfeder-Quer-Pendel



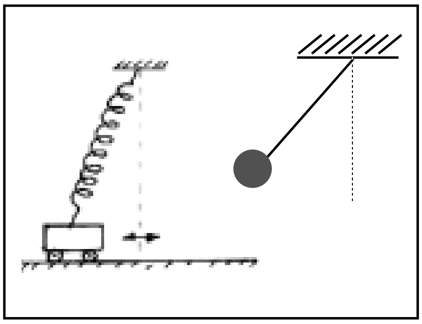
• Die Bewegungsgleichung des Zwei-Zugfeder-Quer-Pendels kann mit elementaren mathematischen Mitteln aufgestellt, aber nicht gelöst werden. (vgl. Unterrichtsmaterialien). Die Herleitung soll exemplarischen Charakter haben.

2. Das Gummipendel



• Die Kennlinie des Gummipendels, das Kraft-Weg-Gesetz, wird experimentell für ein Gummiband (Konfektionsgummi) aufgenommen und zeigt sich als nichtlinear. Arbeitsteilig kann mit verschiedenen Gummis gearbeitet werden. Eine weitere Bearbeitung ist mit den üblichen Mitteln der Analysis nicht möglich. Das ist der Einstieg in die Modellbildung.

3. Der Jo-Jo-Wagen und das Fadenpendel mit großer Amplitude (optional)



• Zur Übung können weitere Beispiele bearbeitet werden. Den Zeitansatz beachten.

4. Unterrichtseinheit: Einführung in das Modellbildungssystem und erste Anwendungen

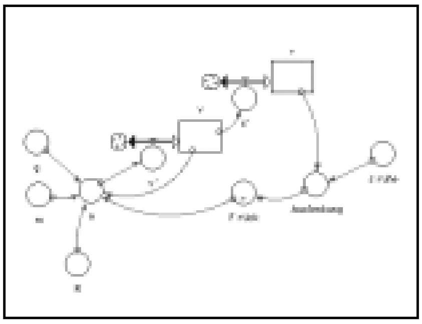
Didaktischer Kommentar:

Die didaktische Schwelle beim analytischen Zugang zum Chaos in der Schule besteht im Wesentlichen in der Behandlung der Differenzialgleichungen. Diese müssen explizit thematisiert, angesetzt und gelöst werden. Dies ist nur durch Modellbildung, unter Rechnereinsatz und einem gewissen Programmieraufwand möglich, wobei Modellbildungssysteme wie (STELLA, MODUS, POWERSIM, u. a.) den Programmieraufwand wesentlich verringern und sich als geeignete Differenzialgleichungslöser anbieten. Falls nicht bereits im vorangegangenen Unterricht zu anderen Themen geschehen, muss an dieser Stelle eine Einführung in ein Modellbildungssystem erfolgen, das anschließend auf die nichtlinearen Schwinger der 3. Unterrichtseinheit angewendet wird.

Näheres zur Modellbildung Seite 37 und im Anhang A.

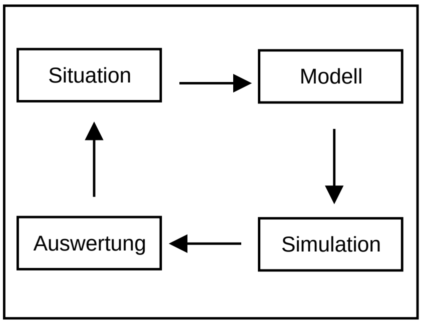
Unterrichtsskizze:

1. Einführung in ein Modellbildungssystem



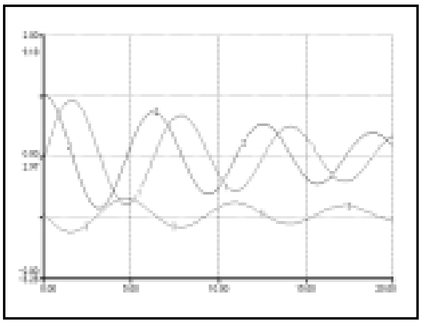
• Anhand vorbereiteter Beispiele wird man in die Sprache und Symbolik des Modellbildungssystems einführen (vgl. Anhang).
Es ist nicht notwendig, alle Schüler im Umgang mit dem Modellbildungssystem vertraut zu machen. Es kann durchaus als bloßer DGL-Löser mit grafischer Ausgabe betrachtet werden.

2. Der Prozess der Modellbildung



• Der Prozess der Modellbildung ist fundamental in allen Wissenschaften und in der Physik im Besonderen. Hier bietet sich die Möglichkeit zur Methodenreflexion und zur wiederholten Thematisierung der Modellierung. Die vier Modellbildungsschritte können an den nachfolgenden Beispielen demonstriert werden.

3. Anwendung auf harmonische Schwingungen (Zeitkurven, Phasendiagramm)



• Das Grundschema der newtonschen Mechanik, wie es in den Bewegungsgleichungen zum Ausdruck kommt, ist der immer wiederkehrende Kern aller Schwingungsbeispiele. Man wird bereits bearbeitete Beispiele aus den Unterrichtseinheiten 1 und 2 anhand der Zeitkurven darstellen. Für die nachfolgenden Chaosbeispiele sind Phasendiagramme unerlässlich.

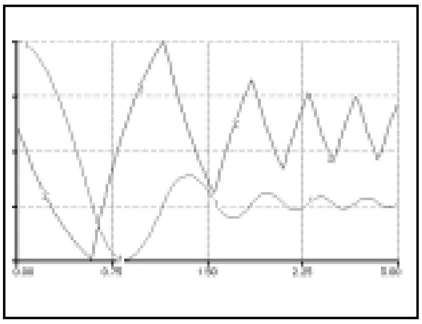
5. Unterrichtseinheit: Nichtlineare freie Schwingungen in Experiment und Modell

Didaktischer Kommentar:

Nichtlinearität ist eine notwendige Bedingung zum Entstehen von Chaos. Aufgrund der mathematischen Schwierigkeiten wurde Nichtlinearität bislang im Physikunterricht immer unter dem 'Dogma der Linearisierung' weggedrängt und als unschöner, vernachlässigbarer Effekt behandelt. Erst die Chaostheorie zeigt, dass die Welt im Wesentlichen nichtlinear ist, und die Vielfalt der Welt wird gerade durch die Nichtlinearität geprägt. Modellbildungssysteme eröffnen didaktische und methodische Wege in die Physik der Nichtlinearität. Besonders einfach erwächst sie aus bekannten Beispielen der Schulphysik, den nichtlinearen Schwingungen.

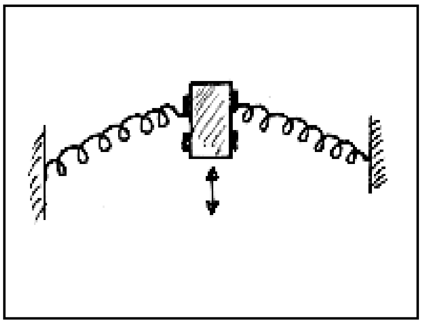
Unterrichtsskizze:

1. Das Schiefe-Ebene-Pendel



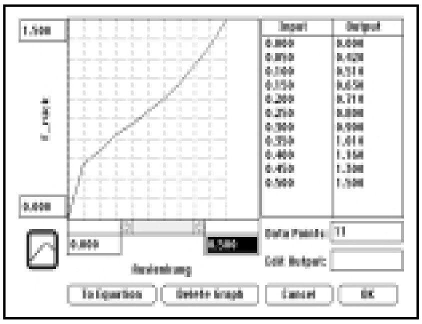
• Das Schiefe-Ebene-Pendel ist aus der Unterrichtseinheit 2 bekannt und kann leicht modelliert werden und dem Realexperiment durch Parameterangleichung angeglichen werden.
Das Phasendiagramm sollte zu Übungszwecken unbedingt mit den Zeitkurven wechselseitig interpretiert werden.

2. Das Zwei-Zugfeder-Quer-Pendel



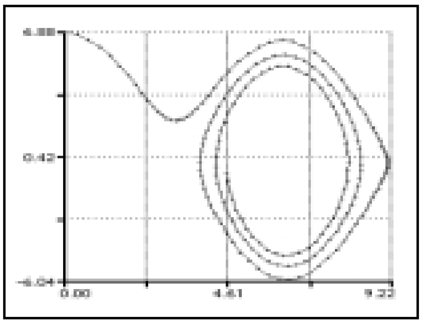
• Das Zwei-Zugfeder-Quer-Pendel kann nun mit dem Modellbildungssystem gelöst und untersucht werden.

3. Das Gummipendel



• Die nichtlineare Kennlinie des Gummipendels, das Kraft-Weg-Gesetz, wurde experimentell für ein Gummiband (Konfektionsgummi) aufgenommen.
Das Modellbildungssystem erlaubt die Eingabe der experimentellen Daten und eine Lösung der DGL damit. Durch Parameterangleichung (Fitting) lassen sich Modell und Realexperiment angleichen.

4. Der Jo-Jo-Wagen und das Fadenpendel mit großer Amplitude (optional)



• Zur Übung können weitere Beispiele bearbeitet werden, wobei der Zeitansatz beachtet werden muss.

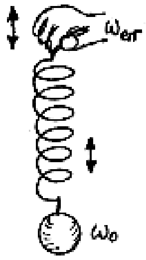
6. Unterrichtseinheit: Erzwungene lineare und nichtlineare Schwingungen in Experiment und Modell

Didaktischer Kommentar:

Der Unterricht bewegte sich in den bisherigen Unterrichtseinheiten, abgesehen von der Betonung auch nichtlinearer Beispiele, auf inhaltlich traditionellen Wegen. Auch diese Unterrichtseinheit über erzwungene Schwingungen ist traditionell und wird lediglich durch die Schwerpunktbildung im Hinblick auf Chaosfähigkeit ergänzt. Ein schwingungsfähiges System ist nur dann chaosfähig, wenn es mindestens drei Freiheitsgrade besitzt. Bei den eindimensionalen Schwingungen, die bislang ausschließlich behandelt wurden, wird der dritte Freiheitsgrad durch die Außenanregung geliefert.

Unterrichtsskizze:

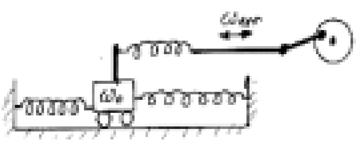
1. Freihandexperiment zu erzwungenen Schwingungen



• Das bekannte Freihandexperiment mit einer Schraubenfeder großer Masse zeigt die drei Fälle der Anregung:

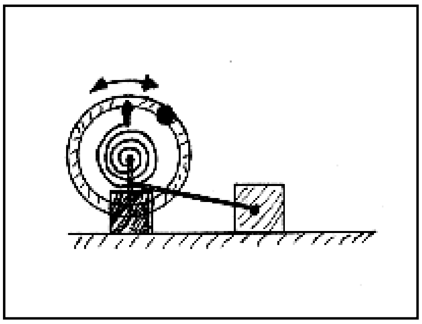
1. $\omega_{err} << \omega_0$ Schwingung mit Eigenfrequenz
2. $\omega_{err} \approx \omega_0$ Resonanzfall
3. $\omega_{err} >> \omega_0$ Schwingung mit Erregerfrequenz

2. Experiment zu erzwungenen gedämpften Schwingungen



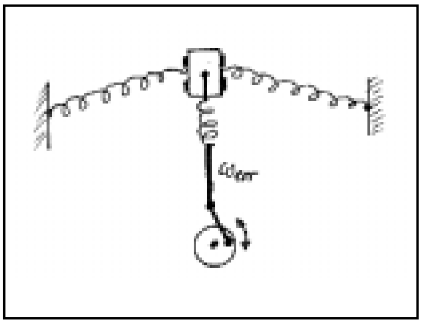
• Entsprechend dem Zeitansatz und den experimentellen Möglichkeiten können weitere Untersuchungen zu den erzwungenen, gedämpften Schwingungen erfolgen. Modellierungen mit dem Modellbildungssystem sollten unbedingt erfolgen. Zeitdiagramme sollten mit Phasendiagrammen verglichen werden.

3. Experiment mit dem Pohlschen Rad



• Falls das Pohlsche Rad zur Verfügung steht, können die entsprechenden Experimente daran durchgeführt werden. Eine Registrierung kann mittels Bewegungsmesswandler und Interface erfolgen. Eine Modellierung mit dem Modellbildungssystem ist angebracht. Alternativ kann auch eine entsprechende Computersimulation oder der Videofilm des ILF [12] eingesetzt werden.

4. Das erzwungene gedämpfte Zwei-Zugfeder-Quer-Pendel



• Das erzwungene Zwei-Zugfeder-Quer-Pendel lässt sich noch experimentell mit einfachen Mitteln realisieren und modellieren.
Das Potenzial ist V-förmig.

7. Unterrichtseinheit: Der Weg ins Chaos

Didaktischer Kommentar:

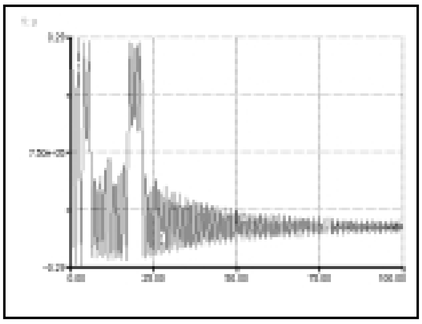
Die Voraussetzungen für die Chaosfähigkeit eines schwingenden Systems sind:
1. Mindestens drei Freiheitsgrade
2. Nichtlinearität
3. Stellen sensitiver Abhängigkeit (lokale Maxima im Potenzial, z. B. W-Potenzial).

Die schwingenden Systeme wurden systematisch dahin gehend erweitert und ausgebaut. Mit dem erzwungenen, gedämpften Zwei-Druckfeder-Quer-Pendel liegt ein prinzipiell chaosfähiges System vor. Die technische Realisierung scheitert daran, dass sich die Druckfedern seitlich wegbiegen. Didaktisch bedeutsam hingegen ist, dass allerdings ein Beispiel vorliegt, das systematisch schrittweise vom elementaren Schwinger zum chaosfähigen System über alle Zwischenstufen ausgebaut wurde. Der Übergang zum Pohlschen Rad und zum nichtlinearen elektrischen Schwingkreis durch Analogiebildung ist dann didaktisch legitim.
Der Weg ins Chaos zeigt sich durch Bifurkation an, die sich am Pohlschen Rad und am nichtlinearen elektrischen Schwingkreis experimentell demonstrieren lässt.
Im Phasendiagramm kündigt sich das Chaos dadurch an, dass sich kein Grenzzyklus ergibt, sondern die Ebene fast komplett ausgefüllt wird. Dabei ist zu beachten, dass die Phasendia-

gramme eine Projektion der Bewegungen im dreidimensionalen Phasenraum darstellen. (Der Determinismus verbietet ja gerade Überschneidungen im Phasenraum.) Physikalisch und didaktisch sind Phasenraumdiagramme ein wertvolles Hilfsmittel, das frühzeitig im Physikunterricht eingesetzt werden sollte. Auf POINCARE-Schnitte kann verzichtet werden.

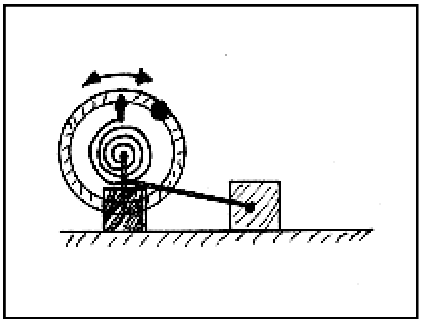
Unterrichtsskizze:

1. Das Zwei-Druckfeder-Quer-Pendel



• Das erzwungene Zwei-Druckfeder-Quer-Pendel hat ein W-förmiges Potenzial und ist offensichtlich chaosfähig. Experimentell lässt sich der Druckfederwagen wohl kaum mit einfachen Mitteln realisieren. Die Federn biegen sich unter Druck seitlich weg. (Evtl. bieten sich Stoßdämpfer an, die auf Zug und auf Druck reagieren.)

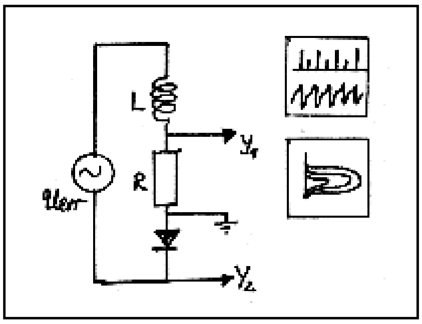
2. Bifurkation und Chaos am Pohlschen Rad



• Falls das Pohlsche Rad zur Verfügung steht, können die entsprechenden Experimente damit durchgeführt werden.

Experimentelle Hinweise findet man reichlich in der neueren Gerätebeschreibung zum Pendel sowie in den Literaturen [1] und [9].

3. Bifurkation am nichtlinearen elektrischen Schwingkreis



• Am nichtlinearen elektrischen Schwingkreis lassen sich experimentell einfach einige Bifurkationen erreichen. Die Nichtlinearität wird dabei durch die nichtlineare Kennlinie der Diode erzeugt. Experimentelle Hinweise findet man in der Literatur [10].

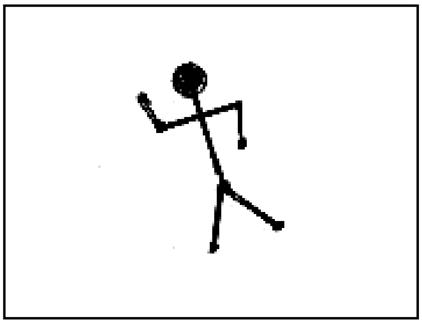
8. Unterrichtseinheit: *Z*weidimensionale nichtlineare freie Schwingungen in Experiment und Modell

Didaktischer Kommentar:

Bei allen eindimensionalen Schwingungen benötigt man zur Chaosfähigkeit eine Außenanregung zum Erhalt des dritten Freiheitsgrades. Weicht man hingegen auf zweidimensionale Schwingungen, also Schwingungen in der Ebene aus, so erhält man vier Freiheitsgrade, vermindert um einen durch die Kopplung über den Energiesatz. (Die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ist die Anzahl der Freiheitsgrade, die den Phasenraum bilden, vermindert um die Anzahl der im System geltenden Erhaltungssätze.) Die zweidimensionalen Schwingungen eignen sich sehr gut zur Modellierung als qualitative Demonstrationsexperimente, nicht hingegen als Messexperimente.

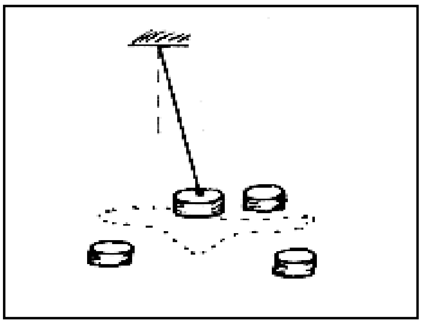
Unterrichtsskizze:

1. Chaos-Man



• Das als Spielzeug vertriebene Doppelpendel eignet sich zur qualitativen Demonstration chaotischer Vorgänge.

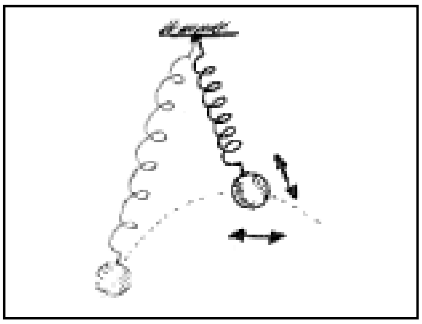
2. Magnetpendel



• Das Magnetpendel lässt sich experimentell leicht realisieren.

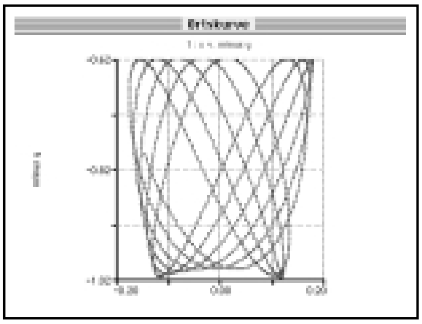
Mit etwas Aufwand lassen sich auch die Einzugsgebiete des Pendels aus verschiedenen Startpositionen heraus verschiedenfarbig einfärben.

3. Das Feder-Faden-Pendel



• Die Bewegungsgleichungen des Feder-Faden-Pendels lassen sich mit den Mitteln der Schulmathematik leicht aufstellen (vgl. Literatur [1]).
Die experimentelle Realisierung ist schwieriger, da Torsionsschwingungen der Schraubenfeder unvermeidlich sind. Hinweise sind in der Literatur [10] zu finden.

4. Modellierung des Feder-Faden-Pendels

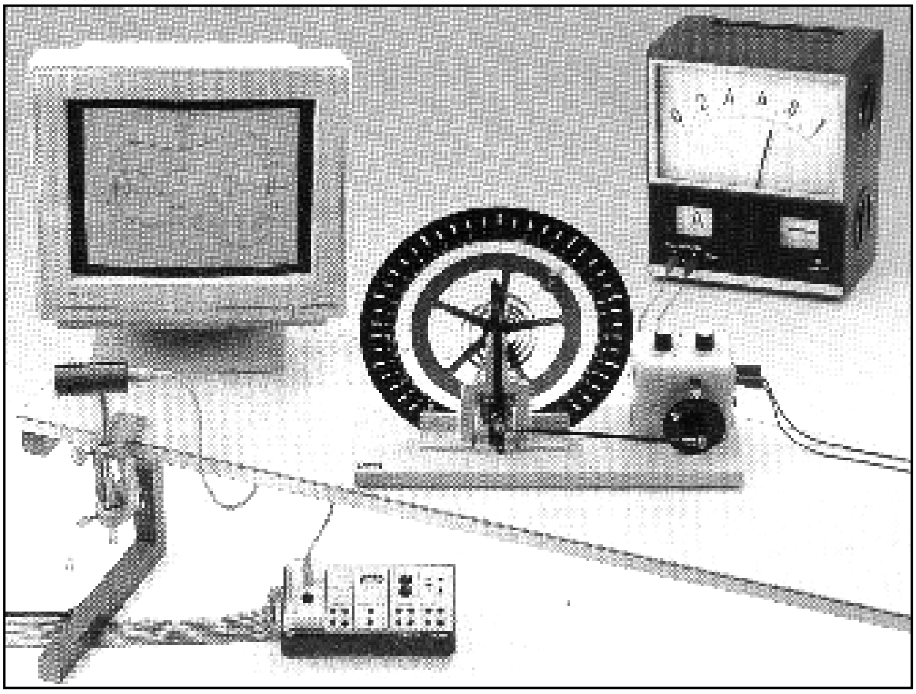


• Das Feder-Faden-Pendel kann leicht modelliert werden.

2. Das Pohlsche Rad als chaosfähiger Schwinger

In manchen physikalischen Schulsammlungen findet sich das Pohlsche Rad aus Zeiten, als noch niemand chaotisches Verhalten studierte. Manche Physiklehrerinnen und Physiklehrer kennen das klassische Pohlsche Rad als Praktikumsexperiment zum Themengebiet der Drehschwingungen. Die drei folgenden Fragen sind naheliegend:

1. Warum bietet sich besonders das Pohlsche Rad zur Demonstration der Wege ins Chaos an, und was sind die Vorzüge des Pohlschen Rades gegenüber anderen mechanischen Schwingern?
2. Was macht das klassische Pohlsche Rad zum chaotischen Schwinger?
3. Welche praktischen Umbauten und welche besonderen Einstellungen sind notwendig?



2. 1 Die Vorzüge des Pohlschen Rades beim Weg ins Chaos

Das Pohlsche Rad eignet sich aus vielerlei Gründen für die Untersuchungen der Wege ins Chaos und speziell für Untersuchungen zum Bifurkationsszenario:

- Das Pohlsche Rad ist ein mechanischer Schwinger und sinnlich leicht erfassbar.
- Die Auslenkungen, die Geschwindigkeiten und die Zeiten liegen in beobachtbaren Skalen.
- Die verschiedenen Parameter können relativ leicht verändert werden. Insbesondere die

Stromstärke der Wirbelstromdämpfung kann als sogenannter Kontrollparameter leicht reproduzierbar verändert werden.

Aus begrifflichen, formalen und didaktischen Gründen wären geradlinige Schwinger den Drehschwingungen vorzuziehen. Allerdings haben andere mechanische Schwinger gravierende experimentelle Nachteile. So z. B.:

- erzwungene Blattfederpendel: Relativ kleine Amplitude und eine Zeitskala, die zur direkten Beobachtung ungeeignet ist.
- erzwungene Duffing-Oszillatoren: Bei allen Realisierungen mit Schraubenfedern treten unerwünschte Torsionen auf, die nur schwer zu kontrollieren sind.
- freie Doppelpendel: Die theoretische Behandlung erfordert den Lagrange-Formalismus und eine experimentelle Variation von Kontrollparametern ist kaum möglich. Ähnliches gilt für andere freie zweidimensionale Feder-Faden-Schwinger, Magnetpendel, u. a..

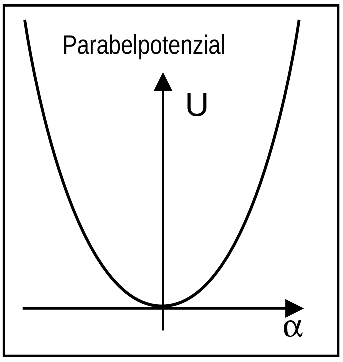
2.2 Der Umbau des Pohlschen Rades zum chaotischen Schwinger

Zum Studium der Wege ins Chaos, muss das klassische Pohlsche Rad durch Umbauten chaosfähig gemacht werden. Das wird deutlich, wenn man die Bedingungen untersucht, die einen Schwinger zum chaosfähigen Schwinger machen.

Das klassische Pohlsche Rad ist ein linearer Drehschwinger mit der DGL:

$\Theta \cdot \alpha'' + D \cdot \alpha = 0$ und der Lösung: $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin\omega t$.

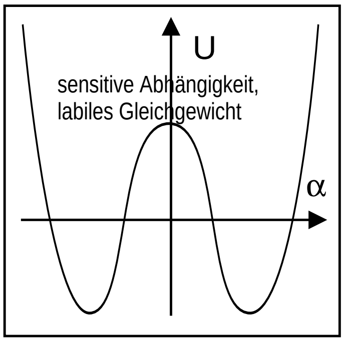
Dabei ist α der Drehwinkel, Θ das Trägheitsmoment, $\Theta \cdot \alpha''$ das Drehmoment und D die Federkonstante. Das zugehörige Potenzial $U(\alpha)=1/2 \cdot D \cdot \alpha^2$ dieses konservativen Systems ist ein Parabelpotenzial.



Das Pendel kann sich so niemals chaotisch verhalten, es fehlen noch entscheidende Bedingungen dazu. Daran ändert auch die auftretende Schleifreibung oder die absichtlich eingebaute Wirbelstromdämpfung nichts. Sie ergänzt die zugehörige Differenzialgleichung durch ein zusätzliches Drehmoment $M_{Dämpfung} = k \cdot I^2 \cdot \alpha'$. (Die Wirbelstromdämpfung ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit α' und proportional zum Quadrat der Dämpfungsstromstärke).

Das klassische Pohlsche Rad wird bekanntlich eingesetzt zur experimentellen Untersuchung
- von gedämpften harmonischen Drehschwingungen und
- des Resonanzverhaltens des Drehpendels mittels des äußeren Antriebs.

Auch das angetriebene klassische Pohlsche Rad kann sich noch nicht chaotisch verhalten. Erst wenn das Potenzial durch eine zusätzlich angebrachte Unwuchtmasse nichtlinear zu einer W-Form verändert wird, kann sich Chaos einstellen. Ein Rad mit Unwucht, aber ohne den äußeren Antrieb wäre allerdings auch nicht chaosfähig.



Damit das klassische Pohlsche Rad chaosfähig wird, bedarf es zweierlei:

1. Es bedarf eines nichtlinearen Potenzials mit W-Form. (Der Hintergrund ist der, dass durch die W-Form am Potenzialwall eine Stelle sensitiver Abhängigkeit, also eine labile Gleichgewichtsstelle vorhanden ist, wo das Pendel nach rechts oder nach links ausschlagen kann.)

   Durch die Unwuchtmasse m wird die DGL um ein zusätzliches Drehmoment $M_{Unwucht} = mgr_0 \cdot \sin\alpha$ ergänzt und lautet: $\Theta \cdot \alpha'' + mgr_0 \cdot \sin\alpha + k \cdot I^2 \cdot \alpha' + D \cdot \alpha = 0$.

   (Die Sinusfunktion sorgt für die erforderliche Nichtlinearität.)

2. Es bedarf eines äußeren Antriebs, um einen zusätzlichen 3. Freiheitsgrad neben dem Drehwinkel (1. Freiheitsgrad) und der Drehgeschwindigkeit (2. Freiheitsgrad) zu erhalten. (Der Hintergrund ist der, dass durch den zusätzlichen 3. Freiheitsgrad der Phasenraum dreidimensional wird und überschneidungsfreie Verwicklungen darin möglich sind, die das Chaos charakterisieren.)

   Durch den äußeren Antrieb wird dem Drehpendel ein zusätzliches externes Drehmoment $M_{extern} = D \cdot \alpha_e \cdot \sin\omega_e t$ aufgeprägt, sodass die DGL lautet:

   $\Theta \cdot \alpha'' + mgr_0 \cdot \sin\alpha + k \cdot I^2 \cdot \alpha' + D \cdot \alpha = D \cdot \alpha_e \cdot \sin\omega_e t$.

   Damit ist die DGL für ein chaosfähiges System komplett.

Zusammenfassung:

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Chaos ist das Vorliegen von

- einem nichtlinearen W-Potenzial, um die sensitive Abhängigkeit und um das exponentielle Fehlerwachstum zu erreichen,
- einer Dämpfung, die für eine passende Energieabfuhr sorgt, damit das System nicht kollabiert,
- einem externen Antrieb, um den 3. Freiheitsgrad und damit den dreidimensionalen Phasenraum zu bekommen, damit überschneidungsfreie Verwicklungen möglich sind.

Chaotisches Verhalten stellt sich beim Pohlschen Rad erst ein, wenn die Systembedingungen passend eingestellt sind.

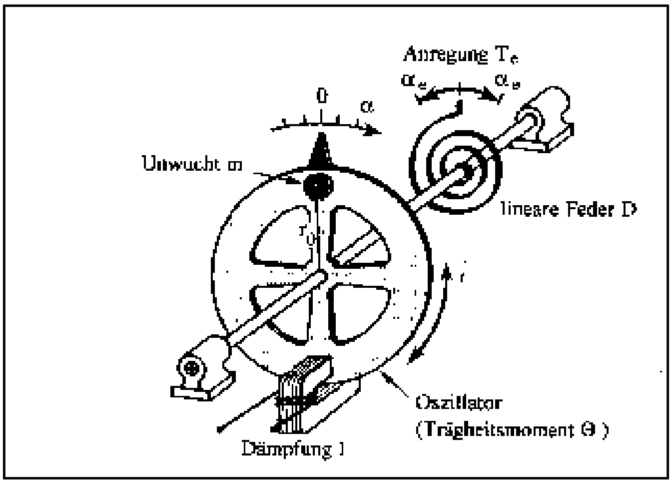
Bildlich gesprochen muss das Pendel immer wieder ganz zart auf den Potenzialberg gebracht werden, wo es sich in einem labilen Gleichgewichtszustand befindet. Bei zu großer Dämpfung schwingt das Pendel immer nur um eine Potenzialmulde herum und bei zu geringer Dämpfung schwingt es fast klassisch immer über den Potenzialberg hinweg. Insofern bietet sich die Dämpfungsstromstärke als Kontrollparameter an, mit dem man das Pendel langsam ins Chaos führen kann. Dabei lassen sich die sogenannten Bifurkationsszenarien beobachten. Experimentell ist die Stromstärke eine Größe, die sich leicht regulieren und reproduzierbar einstellen lässt.

2.3 Der praktische Umbau und die besonderen Einstellungen am Pohlschen Rad

Gegenüber dem harmonischen Schwinger sind folgende Umbauten bzw. Einstellungen nötig:

- Anbringen einer Zusatzmasse (Unwucht),
- Einstellung der Wirbelstromdämpfung und
- Einstellung des Antriebs.

Am klassischen Pohlschen Rad wird die Unwucht durch eine Zusatzmasse von etwa 30g mit Doppelklebeband in der Nullstellung angebracht. Empfehlenswert ist alternativ das Anbringen zweier Massen von etwa 12g links und rechts der Nullstellung. Die Massen müssen nicht gleich sein.

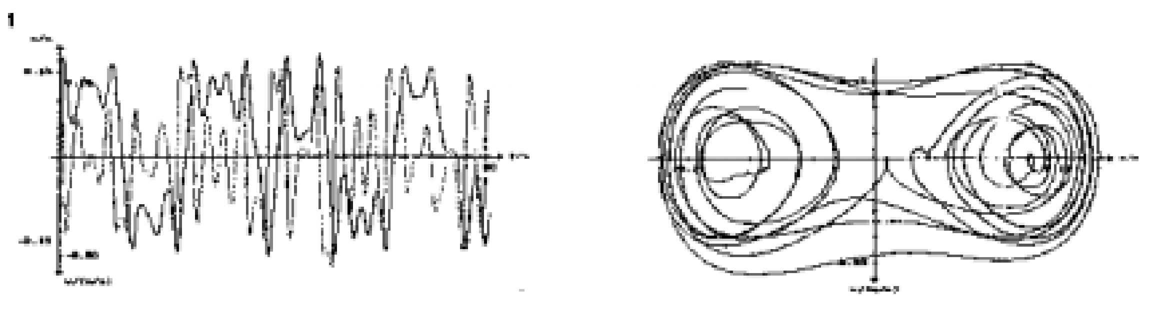


Der stabilisierte Gleichstrom der Wirbelstromdämpfung muss kontinuierlich zwischen 300 mA und 700 mA variiert werden. Der externe Antrieb erfolgt gemäß Gerätebeschreibung mit einer stabilisierten Gleichspannung.

Hinweis:

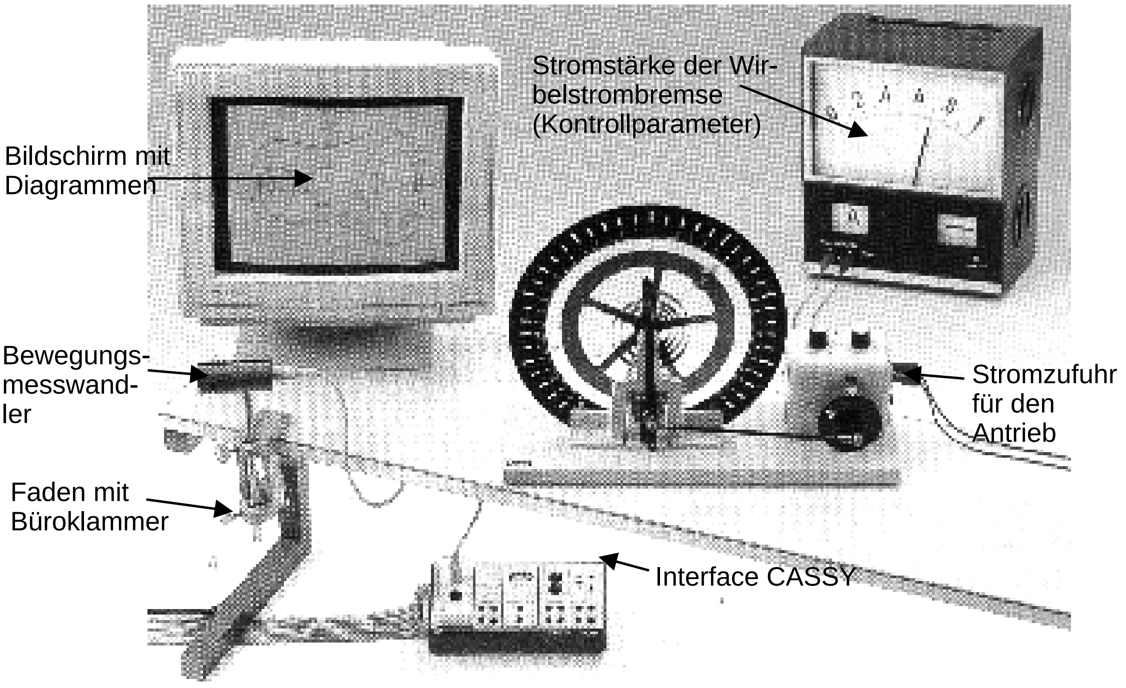
In den neueren Ausführungen des Pohlschen Rades befindet sich auf der Stirnseite des Rades eine eingefräste Rille, in die ein Faden gelegt wird. Der Faden führt über die Rolle des Bewegungsmesswandlers und wird am Ende von einer freihängenden Büroklammer gestrafft. (Der Faden wird mit Tesaband am Rad befestigt. Ältere Pohlsche Räder haben die eingefräste Rille noch nicht!) Der Faden überträgt die Bewegung des Rades auf den Bewegungsmesswandler, der an ein Interface (z. B. CASSY) angeschlossen ist. Damit lassen sich bequem α-t-, bzw. α'-t-Zeitdiagramme und α-α'-Phasendiagramme aufzeichnen.

Alle Diagramme im Videofilm sind derart aufgenommen. Es handelt sich ausschließlich um videografierte Bildschirmdiagramme und nicht um Simulationen. (Der Videofilm ist beim ILF-Mainz erhältlich.)



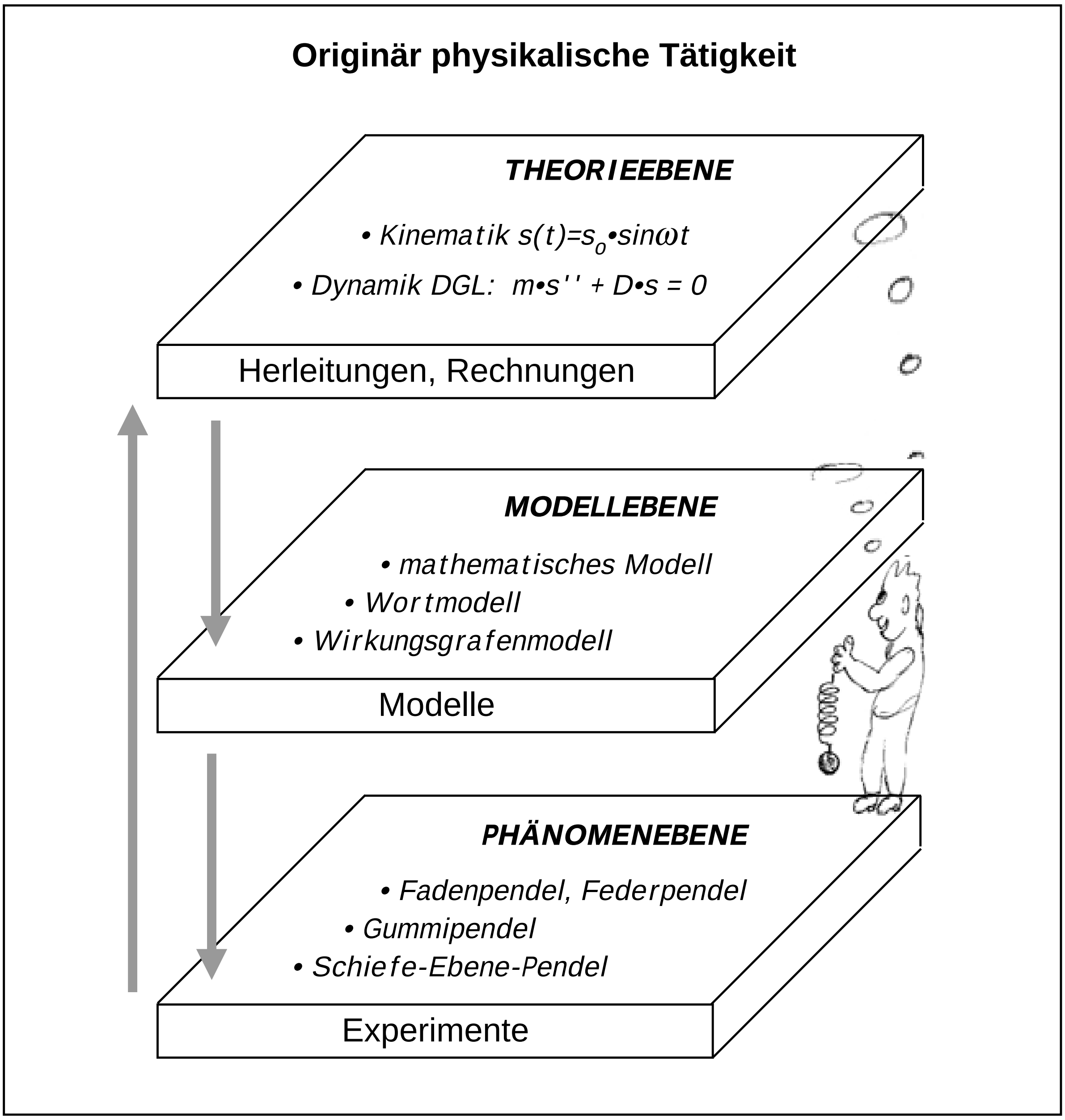
Zeitdiagramme

Phasendiagramm



3. Ein Beispiel zum Prozess der Modellbildung im Physikunterricht

Der wechselseitige Bezug der **Phänomen-Ebene**, der **Modell-Ebene** und der **Theorie-Ebene** ist ein Merkmal physikalischer Tätigkeit. Der Prozess der Modellbildung spielt dabei eine entscheidende Rolle. Unter Zuhilfenahme von Modellbildungssystemen wie STELLA oder DYNASIS bieten sich für die Schulphysik neue Möglichkeiten dieses originär physikalischen Tuns.



Die Modellbildung bezieht sich im Physikunterricht traditionell auf idealphysikalische Vorgänge, z.B. reibungsfreie Bewegungen, da der Schulphysik das zur Behandlung realphysikalischer Vorgänge erforderliche mathematische Werkzeug nicht zur Verfügung steht. Die Modellbildungssysteme bieten hier eine einfache Abhilfe, weil nunmehr realphysikalische

Beispiele bearbeitet werden können. Damit kann der Prozess der Modellbildung vollständig durchlaufen werden. Am konkreten Beispiel des Gummi-Pendels soll das im Folgenden demonstriert werden.

Das **Gummipendel** lässt sich leicht auch als Schülerübung mit Materialien aus dem Haushalt aufbauen. Mit einem Konfektionsgummi wird ein Federpendel aufgebaut. Es handelt sich hierbei um einen stark gedämpften Schwinger unbekannter Dämpfungskonstante. Außerdem vollführt das Gummipendel **keine** harmonischen Schwingungen, da das Kraft-Weg-Gesetz nichtlinear ist. Damit kann das Gummipendel üblicherweise im Physikunterricht nur als Gegenbeispiel eines harmonischen Schwingers gezeigt werden. Mit dem Modellbildungssystem indessen kann man ein gutes Stück weitergehen.

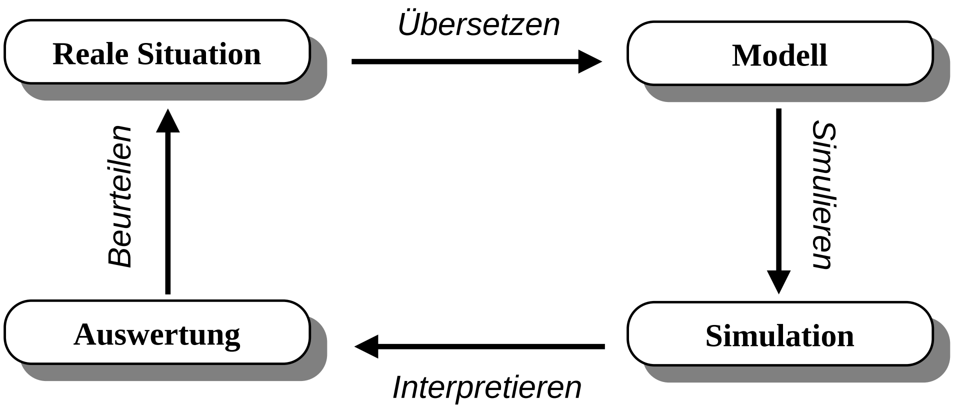
- Man kann das Kraft-Weg-Gesetz experimentell aufnehmen, in das Modellbildungssystem eingeben und damit die Schwingung modellieren.
- Man kann Simulationsläufe mit verschiedenen Dämpfungskonstanten durchführen und dabei die Simulation mit dem Realexperiment bis zur Übereinstimmung fitten.
- Man kann verschiedene Darstellungsmethoden wie Zeitdiagramme, Phasendiagramme, Energiediagramme, Kraft-Weg-Diagramme zeichnen und untersuchen lassen.
- Man kann mit verschiedenen Gummipendeln unterschiedlichster Elastizität experimentieren und sowohl die Modellbildung als auch das Realexperiment wechselseitig ausbauen.

Diese Form des Arbeitens entspricht dem Vorgehen in der physikalischen Forschung und war dem Physikunterricht bislang weitgehend vorenthalten. Die nachfolgenden Unterrichtsmaterialien zeigen das Vorgehen und die Ergebnisse.

Der Prozess der Modellbildung

- *Untersuchungsziel festlegen*
- *Problemstellung formulieren*

- *Wortmodell formulieren*
- *Wirkungsdiagramm erstellen*
- *Flußdiagramm erstellen*
- *formales Modell erstellen*
- *Gleichungen aufstellen*



- *Modellgrenzen eruieren*
- *Modell verfeinern*
- *Besonderheiten auswerten*
- *Ergebnisse interpretieren*

- *Startwerte festlegen*
- *Parameter festlegen*
- *Simulationszeit festlegen*
- *Numerik bestimmen*
- *Ausgabearten auswählen*
- *Simulationen durchführen*
- *Parameter variieren*

Im folgenden sind die einzelnen Kästchen des Modellbildungsprozesses näher ausgeführt:

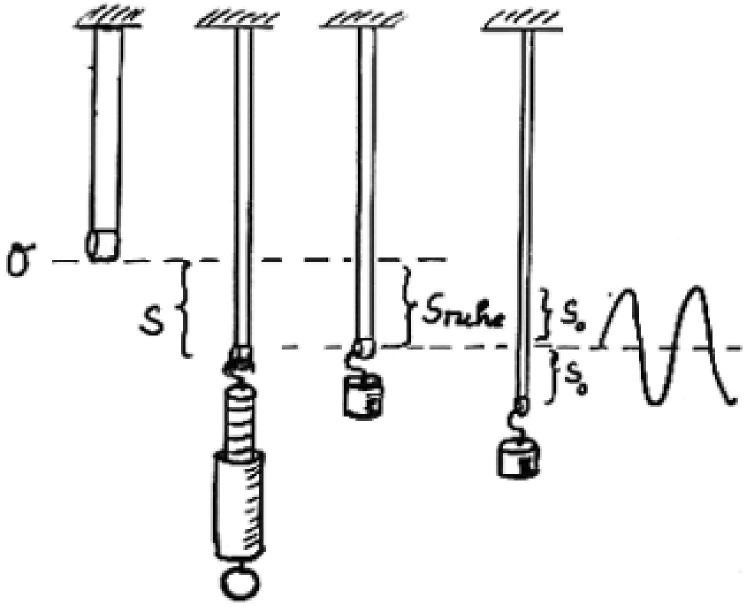
• Untersuchungsziel

Vom Gummipendel wird ein F-s-Diagramm aufgenommen. Das Gummipendel wird modelliert und mit dem Realexperiment verglichen. Es wird solange simuliert, bis die Dämpfungskonstante dem Realexperiment entspricht.

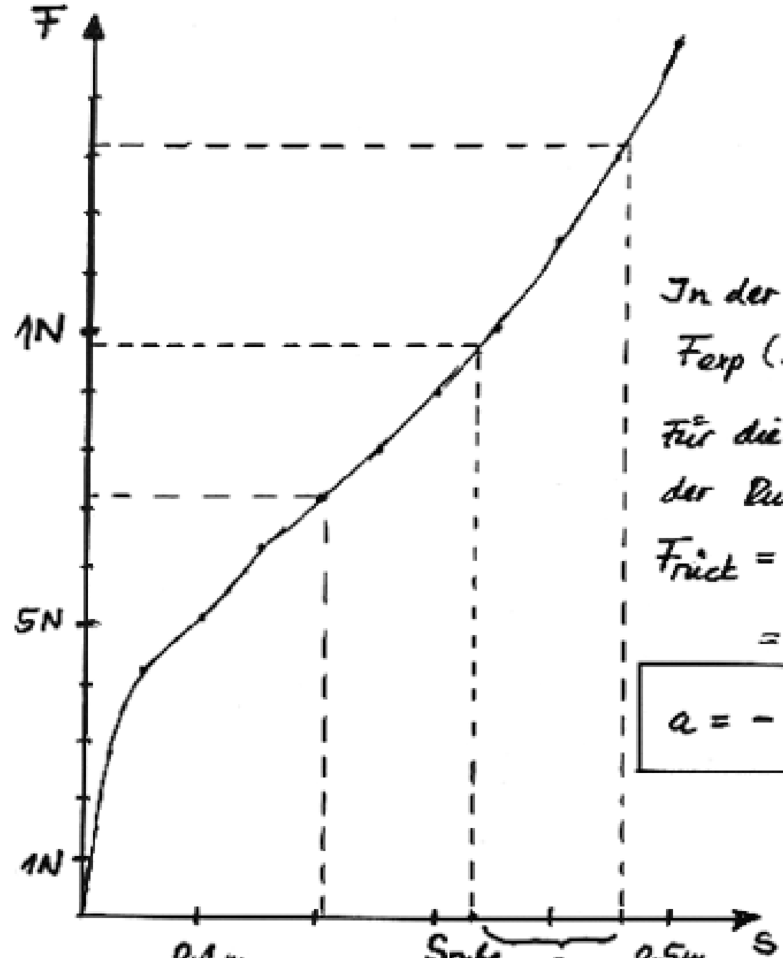
• Problemstellung

Ein Gummipendel vollführt Schwingungen, die denen des gedämpften Federpendels ähnlich sind, aber es sind keine harmonischen Schwingungen, da das lineare Kraftgesetz nur angenähert gilt.

DAS GUMMIPENDEL IM EXPERIMENT UND MODELL



s	F
0 m	0 N
0,05	0,42 N
0,1	0,51 N
0,15	0,63 N
0,2	0,71 N
0,25	0,8 N
0,3	0,9 N
0,35	1,01 N
0,4	1,16 N
0,45	1,3 N
0,5	1,5 N



In der Ruhelage gilt:

$F_{exp}(s_{ruhe}) = m \cdot g$

Für die Auslenkung s aus der Ruhelage gilt:

$F_{rück} = -[F_{exp}(s_{ruhe} + s) - m \cdot g$

$= m \cdot a$

$$\boxed{a = -\frac{F_{exp}(s_{ruhe} + s)}{m} + g}$$

• Wortmodell

Der Pendelbewegung liegt das Grundschema der Newton-Dynamik zugrunde: a $\rightarrow$ v $\rightarrow$ s, wobei die Beschleunigung nicht konstant ist. Die rücktreibende Kraft wird nicht über eine Formel, sondern über eine Messtabelle eingespeist.

• Formales Modell

Das fomale Modell ist die zur Schwingung gehörige Differentialgleichung:

$m \cdot s'' + F_{rück} = 0$, wobei

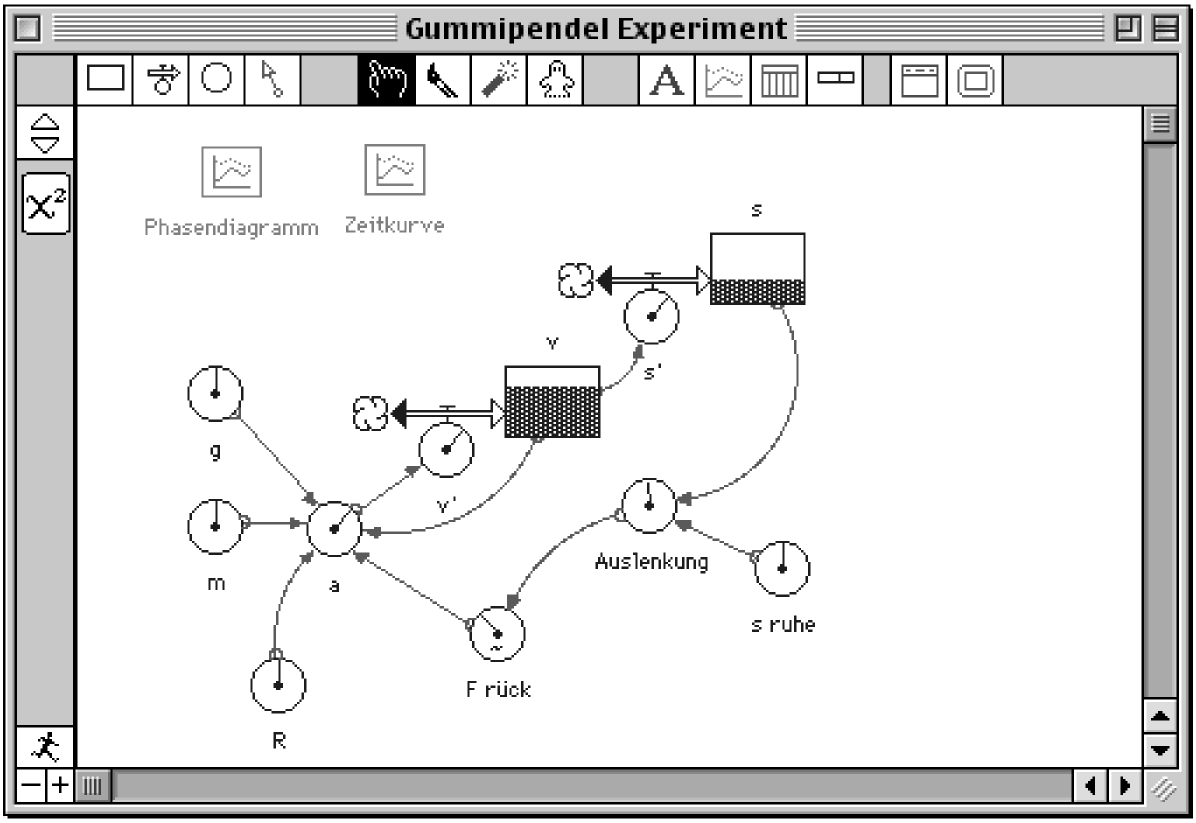
$F_{rück} = -[F_{exp} \cdot (s_{ruhe} + s) - m \cdot g]$

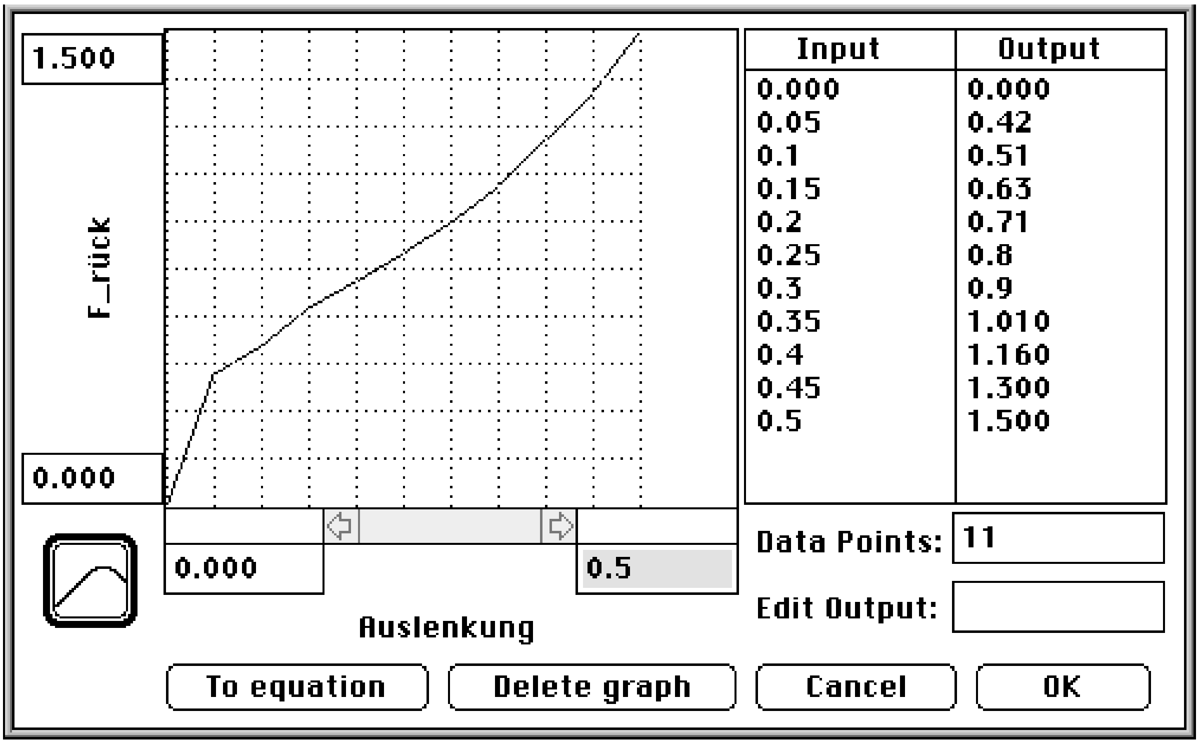
• Wirkungsdiagramm

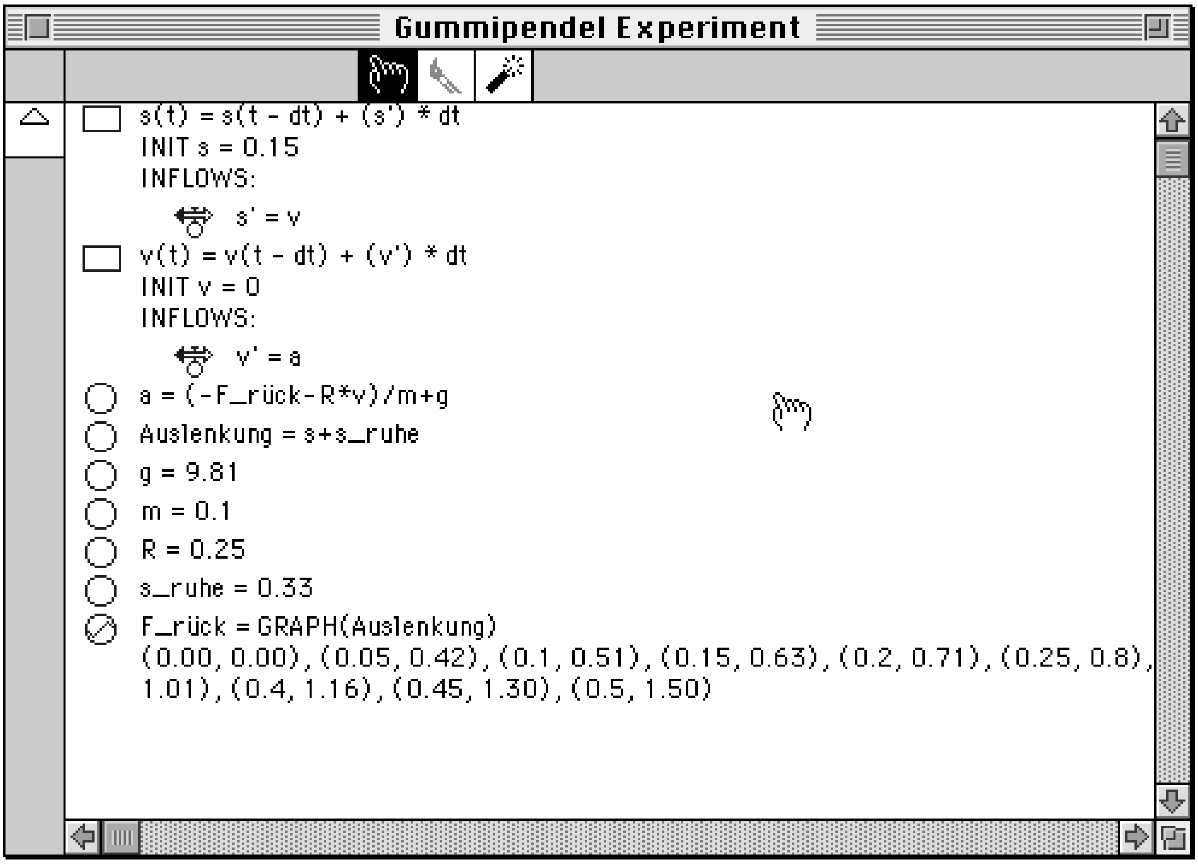
Das Wirkungsdiagramm hat als Kern das Newtonsche Grundschema.

• Gleichungen - Programm

Durch den Wechsel auf die Gleichungsebene können diese mit den entsprechenden Werte eingegeben werden.

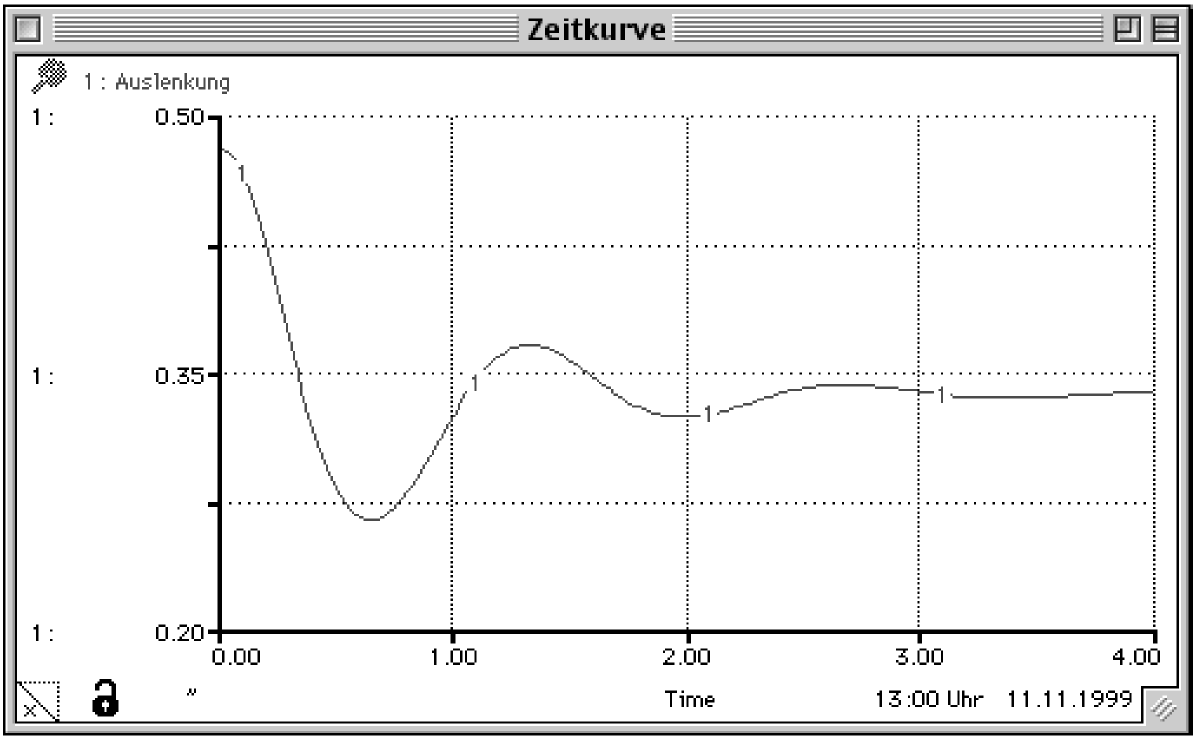


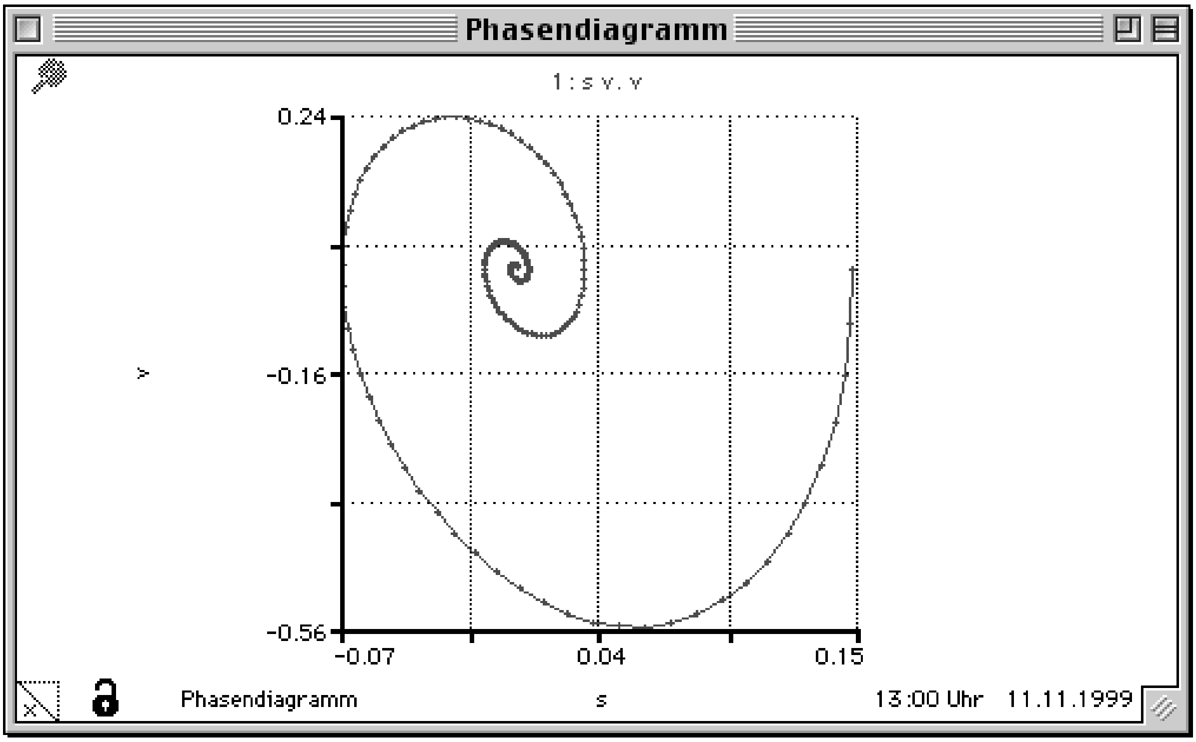

1.500
F_rück
0.000
0.000
0.5
Auslenkung
Input
Output
0.000 0.000
0.05 0.42
0.1 0.51
0.15 0.63
0.2 0.71
0.25 0.8
0.3 0.9
0.35 1.010
0.4 1.160
0.45 1.300
0.5 1.500
Data Points: 11
Edit Output:
To equation
Delete graph
Cancel
OK


Gummipendel Experiment
s(t) = s(t - dt) + (s') * dt
INIT s = 0.15
INFLOWS:
s' = v
v(t) = v(t - dt) + (v') * dt
INIT v = 0
INFLOWS:
v' = a
a = (-F_rück-R*v)/m+g
Auslenkung = s+s_ruhe
g = 9.81
m = 0.1
R = 0.25
s_ruhe = 0.33
F_rück = GRAPH(Auslenkung)
(0.00, 0.00), (0.05, 0.42), (0.1, 0.51), (0.15, 0.63), (0.2, 0.71), (0.25, 0.8),
1.01), (0.4, 1.16), (0.45, 1.30), (0.5, 1.50)

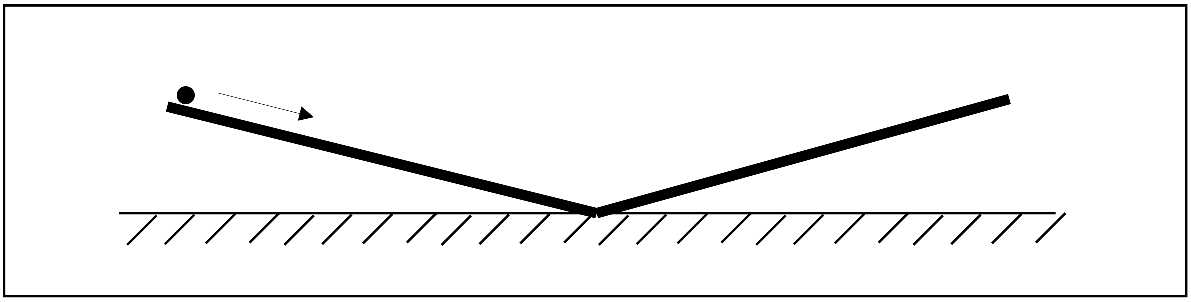
• Startwerte - Parameter **• Simulationszeit - Numerik - Schrittweite** Die passenden Werte ergeben sich im Umgang mit dem entsprechenden Programm.	**• Interpretation der Ergebnisse** Die Dämpfungskonstante wird solange variiert bis die Schwingungsdauer mit der des realen Pendels übereinstimmt.
• Besonderheiten auswerten Alte und neue Gummipendel zeigen unterschiedliches Verhalten. Es gibt eine Art elastische Remanenz.	**• Modellgrenzen** **• Verfeinerungen** Ein experimenteller Ausbau der Apparatur ist durch Aufnahme der Realbewegung mit einem Bewegungsmesswandler möglich.

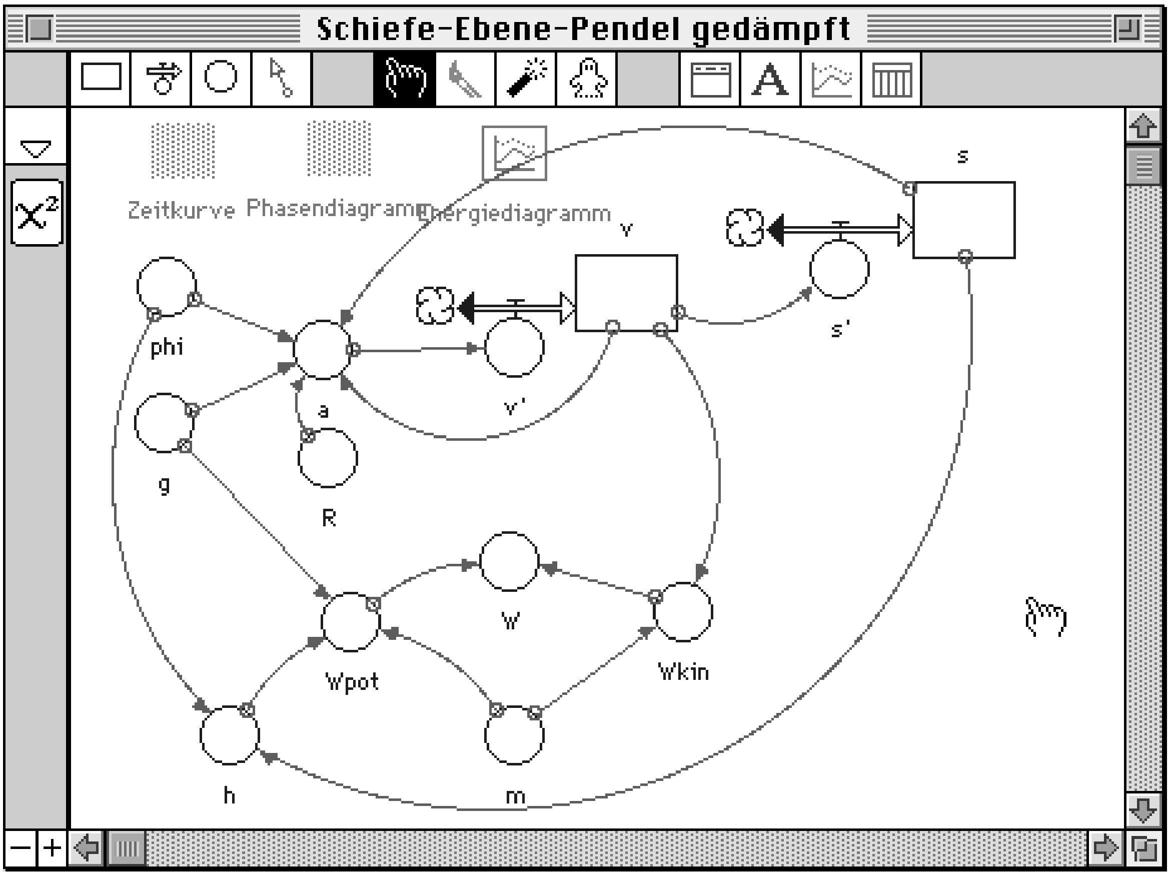
Die nachfolgenden Zeitkurve und Phasendiagramm sind die Endergebnisse der Modellierung nach der Parameteranpassung.

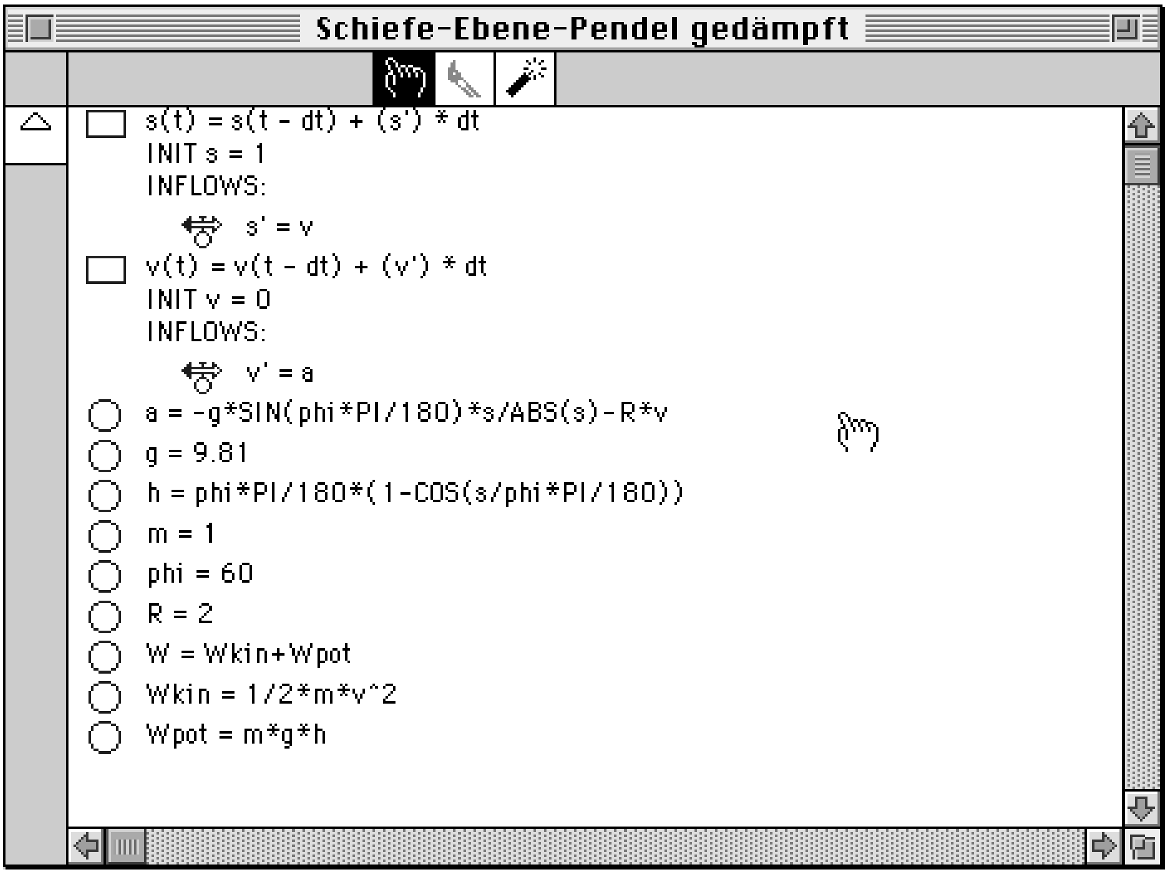




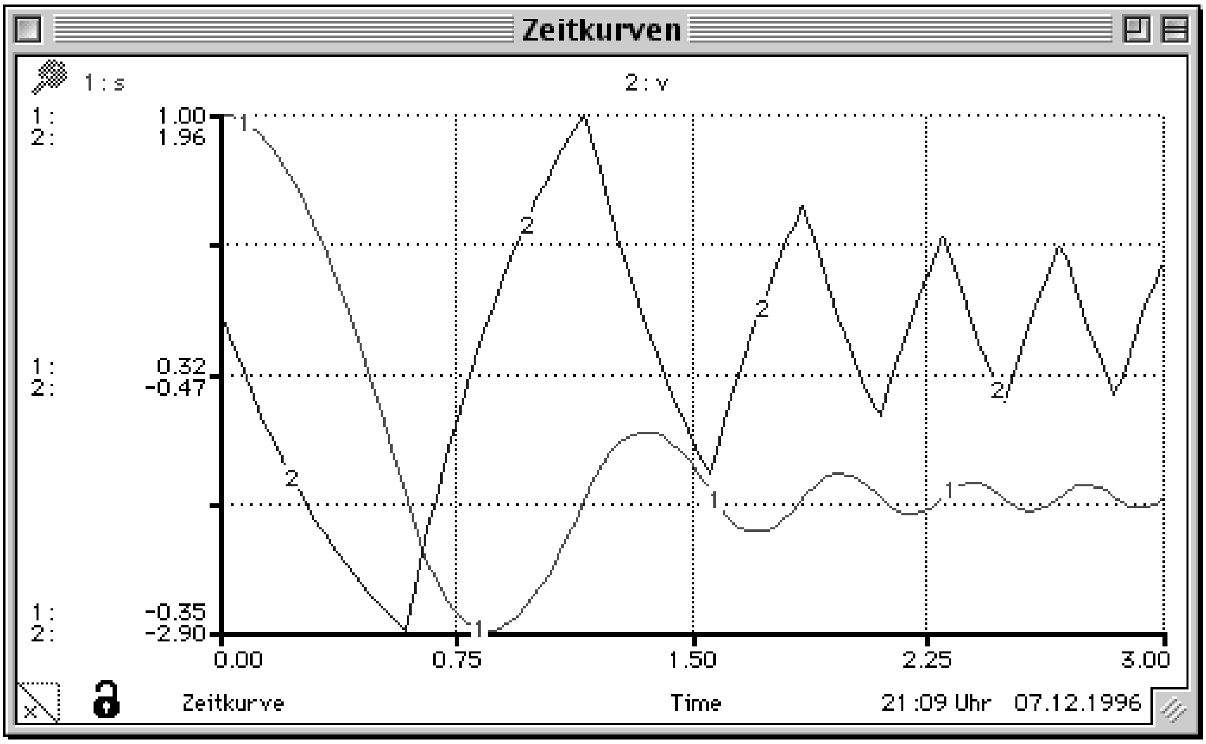
Analog zum **Gummipendel** kann das **Schiefe-Ebene-Pendel** behandelt werden. Dabei handelt es sich um eine doppeltschiefe Ebene, auf der eine Kugel rollt. Als Ebene bieten sich Profilleisten aus dem Bauhandel an. Hier handelt es sich um eine nichtlineare Schwingung, da die rücktreibende Kraft immer konstant ist. Ähnlich wie beim Gummipendel kann die Dämpfungskonstante ermittelt werden.

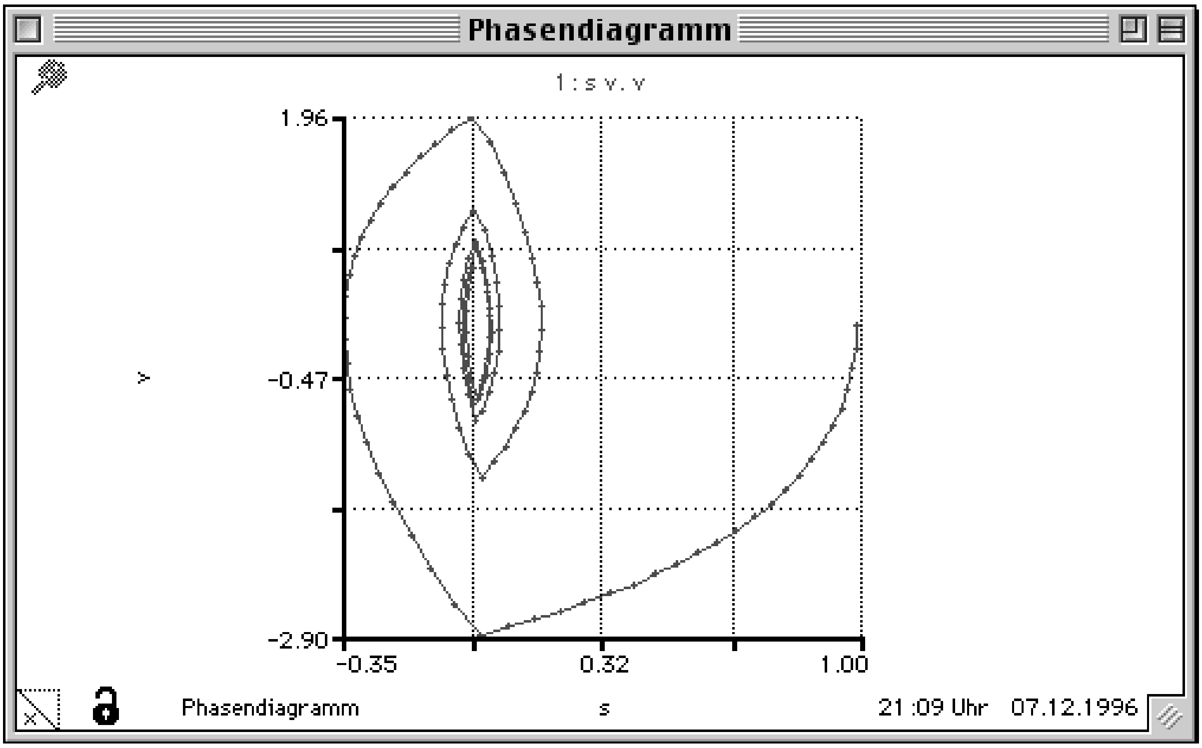







```
s(t) = s(t - dt) + (s') * dt
INIT s = 1
INFLOWS:
    s' = v
v(t) = v(t - dt) + (v') * dt
INIT v = 0
INFLOWS:
    v' = a
a = -g*SIN(phi*PI/180)*s/ABS(s)-R*v
g = 9.81
h = phi*PI/180*(1-COS(s/phi*PI/180))
m = 1
phi = 60
R = 2
W = Wkin+Wpot
Wkin = 1/2*m*v^2
Wpot = m*g*h
```


Zeitkurven
1 : s
2 : v
1 : 1.00
2 : 1.96
1 : 0.32
2 : -0.47
1 : -0.35
2 : -2.90
0.00
0.75
1.50
2.25
3.00
Zeitkurve
Time
21 :09 Uhr 07.12.1996


Phasendiagramm
1 : s v. v
1.96
-0.47
-2.90
v
-0.35
0.32
1.00
Phasendiagramm
s
21 :09 Uhr 07.12.1996

III. Fachlicher Teil

1. Vom harmonischen zum chaotischen Schwinger

1.1 Vier Fragen

Zu dem Thema 'Nichtlineare dynamische Systeme - Chaos' gibt es verschiedene fachliche Zugänge, nämlich

- der analytische Zugang über nichtlineare Schwingungen (kontinuierlich) oder über Daten (diskret)
- der geometrische Zugang über Fraktale
- der systemische Zugang über Selbstorganisationsprozesse der Synergetik.

Für die Schule empfiehlt sich der Weg über die nichtlinearen Schwingungen aus mehreren Gründen:

- Schwingungen sind im Grund- wie im Leistungsfach ein Pflichtthema. Erweiterungen führen dann zu nichtlinearen chaotischen Schwingungen.
- Die mechanischen Schwingungssysteme sind anschaulich und leicht erfassbar.
- Eine theoretische Behandlung ist im Leistungsfach Physik zumindest ansatzweise möglich.
- Es gibt eine Reihe von experimentellen Möglichkeiten, die auch quantitative Auswertungen zulassen.

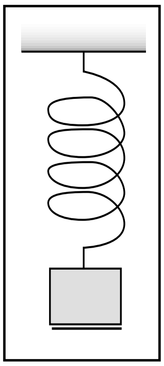
Dem Lehrer, der sich erstmalig mit der Thematik beschäftigt, stellen sich folgende sehr praktische Fragen:

1. Wie mache ich einen Schwinger chaotisch ?
2. Welche Experimente zum Thema Chaos sind auf dem Markt ?
3. Wie erkenne ich Chaos ?
4. Wie untersuche ich chaotisches Verhalten ?

Die erste Frage wird beantwortet, indem ein ganz einfacher Schwinger sukzessiv in mehreren Schritten zu einem chaotischen Schwinger ausgebaut wird. Der Gedankengang und das Vorgehen sind auch im Unterricht mit Schülern möglich. Ausgangspunkt ist die einfachste Schwingung überhaupt.

1.2 Sechs Schritte

1. Schritt: **Ausgangspunkt ist die freie - harmonisch - ungedämpfte - eindimensionale Schwingung**



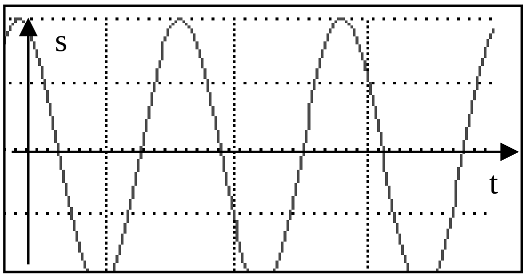
Für die rücktreibende Kraft gilt das lineare Kraftgesetz, sodass mit der newtonschen Grundgleichung die Differenzialgleichung folgt:

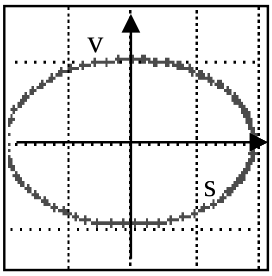
$m \bullet s'' + D \bullet s = 0$ und der Lösung $s(t) = s_0 \bullet \sin\omega t$.

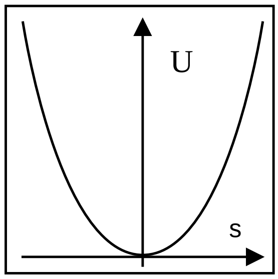
(m = schwingende Masse, D = Direktionsgröße)

Das Zeitdiagramm ist eine Sinuskurve und das Phasendiagramm (s-s'-Diagramm) eine Ellipse.

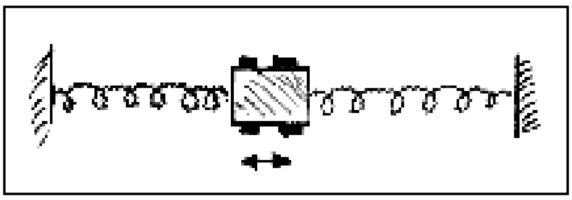
Das Potenzial ist eine Parabel zweiten Grades $U(s)=1/2 \bullet D \bullet s^2$.







2. Schritt: **Erweiterung auf die freie - harmonisch - gedämpfte - eindimensionale Schwingung**

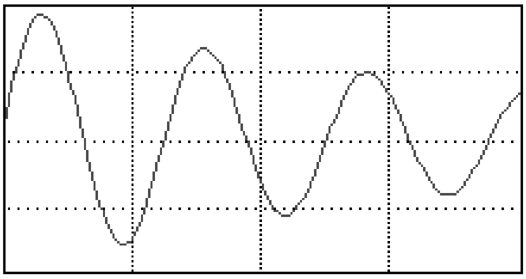
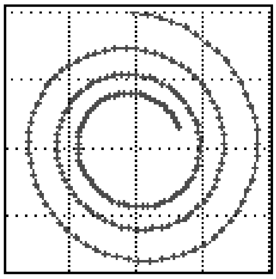
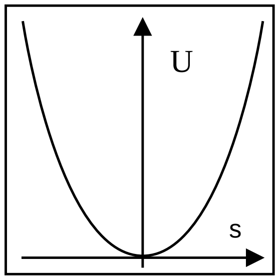


Auch die folgende Schwingung eines eingespannten Wagens zwischen zwei Zugfedern ist eine harmonische Schwingung ($D^*=2 \bullet D$). Unter Berücksichtigung der Reibung mit der Reibungskonstanten R ist die DGL:

$m \bullet s'' + R \bullet s' + D^* \bullet s = 0$.

Die Lösung ist bekanntlich eine Sinusfunktion mit einer Exponentialfunktion als Einhüllende. Das Phasendiagramm spiralisiert auf.

Das Potenzial ist unverändert eine Parabel zweiten Grades $U(s)=1/2 \bullet D^* \bullet s^2$.

Freie eindimensionale harmonische Schwingungen können sich nicht chaotisch verhalten. Es fehlt der dritte Freiheitsgrad, der im nächsten Schritt durch eine externe Kraft dazukommt.

Für das deterministische Chaos erlaubt die äußere Anregung bei eindimensionalen Schwingungen den dritten Freiheitsgrad. Der dritte Freiheitsgrad ist eine notwendige Bedingung für das Auftreten von Chaos. Der Determinismus verbietet, dass sich Trajektorien im Phasenraum schneiden (Kreuzungsverbot). Ansonsten wären die Lösungen der Bewegungsgleichungen nicht eindeutig. In einem zweidimensionalen Phasenraum, beispielsweise bei einer eindimensionalen Schwingung, sind nur drei Bewegungstypen möglich.

a. Die Trajektorie im Phasenraum spiralt sich auf den Nullpunkt auf, d. h., das System kommt durch Reibung zur Ruhe.

b. Die Trajektorie im Phasenraum geht in einen geschlossenen Grenzzyklus (Ellipse) über, d. h., das System ist periodisch wie eine immergehende Uhr.

c. Die Trajektorie im Phasenraum spiralt infolge negativer Dämpfung ins Unendliche auf, d. h., das System explodiert.

In allen Systemen mit einem zweidimensionalen Phasenraum kann es somit kein Chaos geben. Um der Einschränkung des Überschneidungsverbots zu entgehen, muss man in den mindestens dreidimensionalen Phasenraum ausweichen. Der dritte Freiheitsgrad, also die dritte Dimension im Phasenraum, kann man bei Schwingungen u. a. auf zwei verschiedenen Wegen erreichen:

1. Man regt den eindimensionalen Schwinger durch eine äußere Anregung an (erzwungene Schwingungen).

2. Man erweitert die Schwingungen auf zwei Dimensionen, d. h., man betrachtet Schwingungen in der Ebene (z. B. das Doppelpendel, Feder-Faden-Pendel).

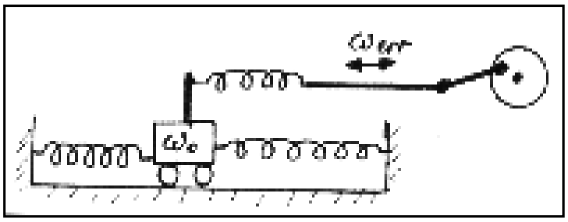
Bemerkungen:

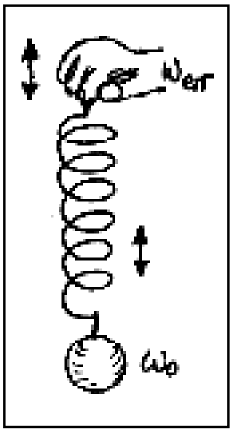
a. Bei zweidimensionalen Schwingungen hat man zwei Weg-Freiheitsgrade und zwei Geschwindigkeits-Freiheitsgrade. Die Kopplung durch den Energieerhaltungssatz reduziert sie auf drei Freiheitsgrade.

b. Der dritte Freiheitsgrad hat bei angetriebenen nichtlinearen Oszillatoren im Phasenraum noch eine topologische Folge, nämlich die Rückfaltung im Phasenraum.

In der Schule sind beide Wege mit unterschiedlichen experimentellen Schwierigkeiten gangbar. In der vorliegenden Schrittfolge wird zunächst der Weg über Anregung eindimensionaler Schwingungen gegangen. Deshalb wird die freie Schwingung zur erzwungenen erweitert.

3. Schritt: Erweiterung auf die erzwungene - harmonisch - gedämpfte - eindimensionale Schwingung





Der zwischen zwei Zugfedern eingespannte Wagen der Masse m wird von außen durch eine periodische Kraft F_{err} mit der Erregerfrequenz ω_{err} zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Das Verhalten des Schwingers hängt vom Verhältnis der Eigenfrequenz ω_o zur Erregerfrequenz ω_{err} ab. Dabei lassen sich drei Fälle von Grunderscheinungen beobachten.

Die zugehörige DGL lautet in Ergänzung der vorherigen:

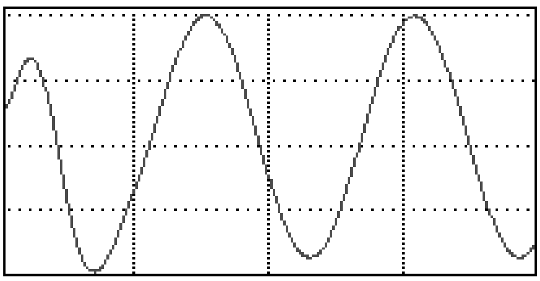
$$m \cdot s'' + R \cdot s' + D^* \cdot s = F_o \cdot \sin(\omega_{err} t + \varphi)$$

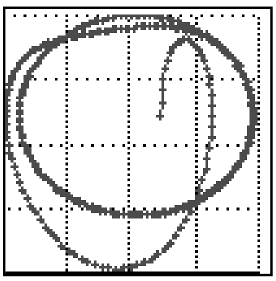
Dabei ist F_o die Amplitude der erregenden Kraft und φ die Phase der Anregung.

In einem Freihandexperiment mit einer Schraubenfeder lassen sich die drei Fälle qualitativ darstellen. Natürlich kann man die drei Fälle auch quantitativ mittels einer Messwerterfassung aufzeichnen oder mit einem entsprechenden Progamm modellieren bzw. simulieren (z.B. ein Modellbildungssystem). Nach dem Einschwingvorgang ergeben sich die folgenden drei Grunderscheinungen mit den entsprechenden Diagrammen:

1. Fall: $\omega_{err} << \omega_o$

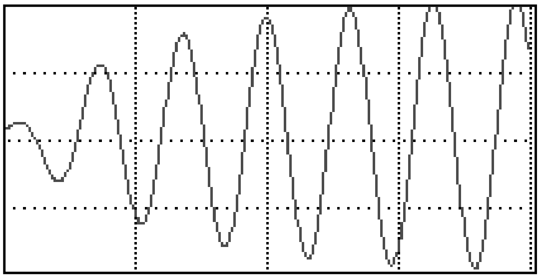
Nach dem Einschwingvorgang schwingt das System mit der Erregerfrequenz weiter. Das Phasendiagramm wird eine Ellipse.

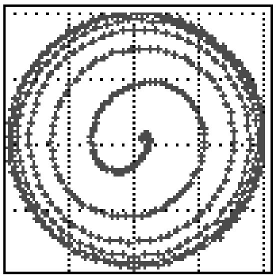




2. Fall: $\omega_{err} \approx \omega_o$ (Resonanzfall)

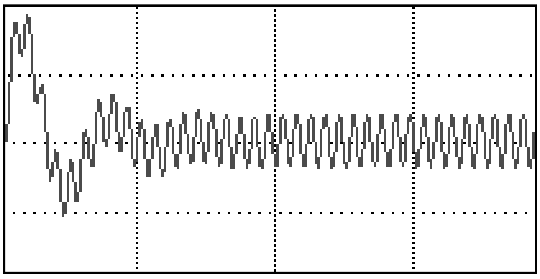
Nach dem Einschwingvorgang schwingt das System bei passender Dämpfung mit der Resonanzfrequenz weiter. Das Phasendiagramm wird eine Ellipse.

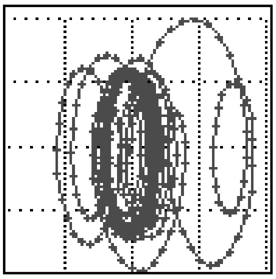




3. Fall: $\omega_{err} >> \omega_o$

Nach dem Einschwingvorgang schwingt das System mit der Erregerfrequenz weiter. Das Phasendiagramm wird eine Ellipse.





Erzwungene harmonische eindimensionale Schwingungen können sich nicht chaotisch verhalten, obwohl eine notwendige Bedingung, nämlich das Vorliegen eines dritten Freiheitsgrades, erfüllt ist.

Es fehlt noch eine weitere notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für chaotisches Verhalten, nämlich die Nichtlinearität. Die Schwingung muss anharmonisch, also nichtlinear sein. Das wird einsichtig, wenn man sich das Potenzial vergegenwärtigt. Das Potenzial einer linearen Schwingung ist als Wegintegral über die Kraft-Weg-Funktion (hookesches Gesetz) eine Parabel zweiten Grades. (Kubische) Nichtlinearitäten können dem Potenzial eine W-Form geben, an dem man sich chaotisches Verhalten bildlich gut vorstellen kann. Durch die Existenz zweier Potenzialmulden vermag das System chaotisch zwischen beiden hin und her zu springen, wenn es passend an den Potenzialwall herangeführt wird. Im Bereich des Potenzialwalls ist das System nämlich hochsensitiv. Bildlich gesprochen muss das Pendel immer wieder ganz zart auf den Potenzialwall gebracht werden, wo es sich in einem labilen Gleichgewichtszustand befindet. Bei zu großer Dämpfung schwingt das Pendel immer nur um eine Potenzialmulde herum und bei zu geringer Dämpfung schwingt es fast klassisch immer über den Potenzialberg hinweg.

Bemerkung: Ein Potenzial mindestens dritten Grades ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für chaotisches Verhalten. Es muss kein W-Potenzial vorliegen, wie das Beispiel der nichtlinearen elektrischen Schwingung mittels Diode zeigt. Ein W-Potenzial erleichtert aber die bildliche Vorstellung.

4. Schritt: Erweiterung auf die erzwungene - anharmonisch - gedämpfte - eindimensionale Schwingung

(a) Benutzung von Zugfedern und Druckfedern ohne Antrieb:

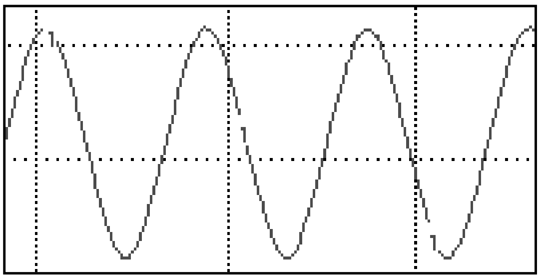
Durch Umbau des eingespannten und frei schwingenden Wagens kann leicht eine anharmonische Schwingung erreicht werden, indem er nicht mehr längs, sondern quer schwingt. Federlänge und Auslenkung sind nun nichtlinear über den Satz des Pythagoras verknüpft. Dadurch enthält die DGL einen nichtlinearen Wurzelterm, der näherungsweise mit der dritten Potenz eingeht (Reihenentwicklung). Die DGL für die freie anharmonische Schwingung lautet:

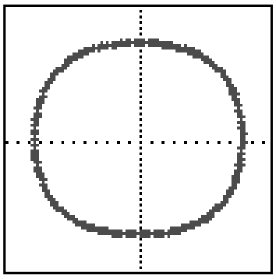
$m \cdot s'' + R \cdot s' + D \cdot s \pm N \cdot s^3 = 0$

(Dies ist die sogenannte Duffing-Gleichung, benannt nach dem Deutschen Ingenieur Duffing, der sich zu Beginn des Jahrhunderts mit nichtlinearen Schwingungen beschäftigte und chaotische Phänomene hätte entdecken können.)

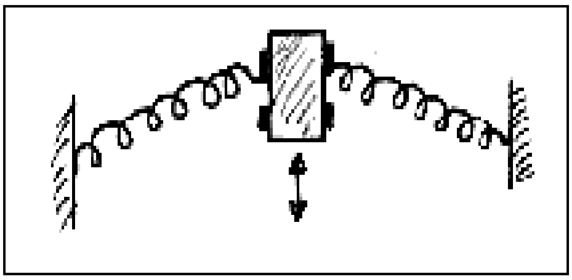
Das Potenzial hat als Wegintegral über die Kraft-Weg-Funktion entsprechend der benutzten Feder, also entsprechend dem Vorzeichen des nichtlinearen Terms, eine M-Form, V-Form oder eine W-Form und lautet: $U(s)=1/2 \cdot D \cdot s^2 \pm 1/4 \cdot N \cdot s^4$.

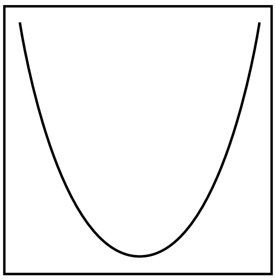
Das s-t-Zeitdiagramm ist eine 'deformierte Sinuskurve' und das Phasendiagramm eine 'deformierte Ellipse'.



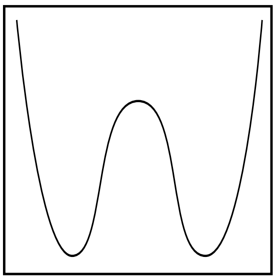


Freie anharmonische eindimensionale Schwingungen erfüllen zwar die eine notwendige Bedingung für Chaos, nämlich die Nichtlinearität (Sensitivität), nicht aber die andere, nämlich die Existenz des dritten Freiheitsgrades. Regt man den anharmonischen Schwinger durch eine passende externe Kraft an, so ist das System chaosfähig.



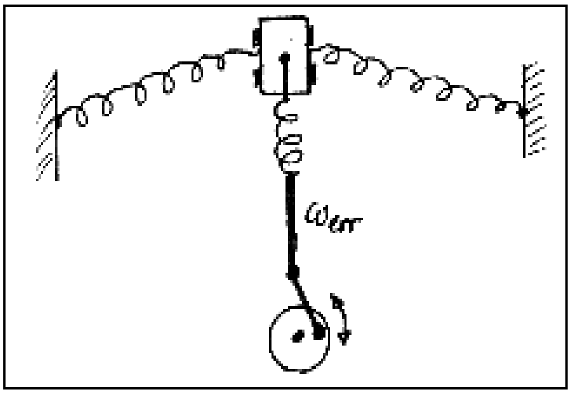


V-Parabel-Potenzial mit Zugfedern



W-Parabel-Potenzial mit Druckfedern

(b) Benutzung von Druckfedern mit Antrieb:



Die zugehörige DGL lautet durch Kombination der vorherigen:

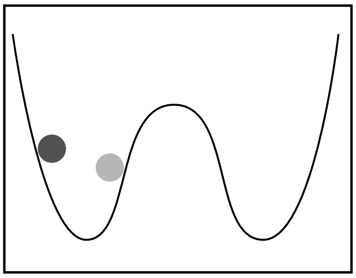
$$m \cdot s'' + R \cdot s' + D \cdot s + N \cdot s^3 = F_o \cdot \sin(\omega_{err} t + \varphi)$$

Damit ist die DGL für ein chaosfähiges System komplett.

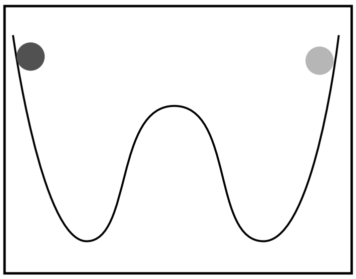
Zusammenfassung: Notwendige Bedingungen für Chaos eindimensionaler Schwinger ist das Vorliegen von

- einer nichtlinearen rücktreibenden Kraft (also einem Potenzial, das mindestens kubisch ist), um die sensitive Abhängigkeit und um das exponentielle Fehlerwachstum zu erreichen,
- einem externen Antrieb, um den 3. Freiheitsgrad und damit den dreidimensionalen Phasenraum zu bekommen, damit überschneidungsfreie Verwicklungen möglich sind,
- einer Dämpfung, die für eine passende Energieabfuhr sorgt, damit das System nicht kollabiert.

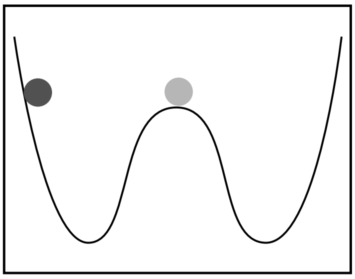
Chaotisches Verhalten stellt sich beim eindimensionalen Schwinger erst ein, wenn die Systembedingungen passend eingestellt sind. Am Beispiel eines W-Potenzials kann man sich das besonders gut bildlich vorstellen.



Anfangsamplitude zu klein
und Dämpfung zu groß



Anfangsamplitude zu groß
und Dämpfung zu klein

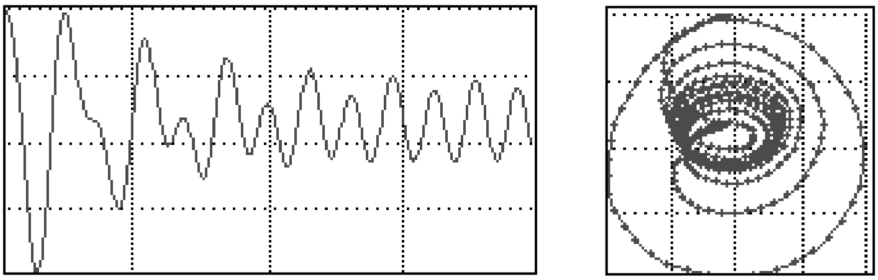


Amplitude und Dämpfung
genau richtig

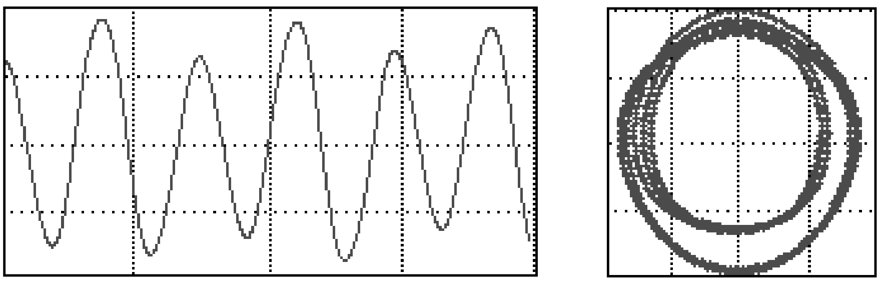
Bildlich gesprochen muss der Schwinger immer wieder ganz zart auf den Potenzialwall gebracht werden, wo er sich in einem labilen Gleichgewichtszustand befindet. Bei zu großer Dämpfung schwingt er immer nur um eine Potenzialmulde herum und bei zu geringer Dämpfung schwingt er fast klassisch immer über den Potenzialwall hinweg. Insofern bietet es sich an, einen sogenannten Kontrollparameter zu benutzen, mit dem man den Schwinger langsam ins Chaos führen kann. Dabei lassen sich die sogenannten Bifurkationsszenarien beobachten.

Das Beispiel des eingespannten Druckfeder-Quer-Schwingers ist zum Verstehen der Chaosbedingungen und aus didaktischen Gründen sehr fruchtbar, allerdings ist es experimentell kaum zu realisieren. Die Verwendung geeigneter Druckfedern ist schwer, da sich diese unter Druckspannung zur Seite wegbiegen. Evtl. wären kleine Stoßdämpfer geeignet. Die folgenden Zeitdiagramme und Phasendiagramme sind Simulationen mit einem Modellbildungssystem, die die obige DGL lösen. Durch Veränderung der Erregerfrequenz als Kontrollparameter können verschiedene Fälle simuliert werden:

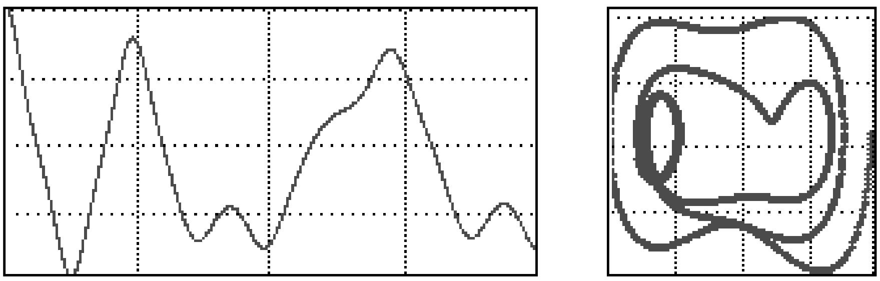
1. Fall: Attraktion auf einen Grenzzyklus



2. Fall: 1. Bifurkation (Im Zeitdiagramm sind abwechselnd zwei Amplituden feststellbar.
Die Trajektorie läuft abwechselnd auf zwei verschiedenen Ellipsen.)



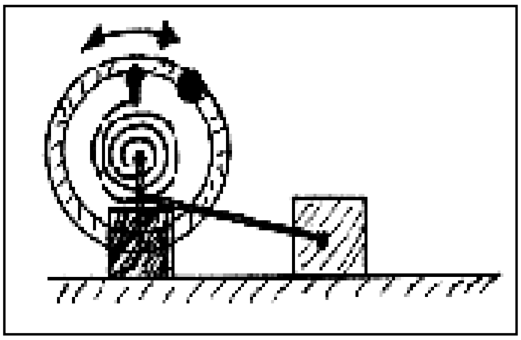
3. Fall: Chaotisches Verhalten



5. Schritt: Experimentelle Bestätigung anhand einer erzwungenen - anharmonisch - gedämpften - eindimensionalen Drehschwingung (Pohlsches Rad)

Das Pohlsche Rad eignet sich aus vielerlei Gründen für die Untersuchungen der Wege ins Chaos und speziell für Untersuchungen zum Bifurkationsszenario:

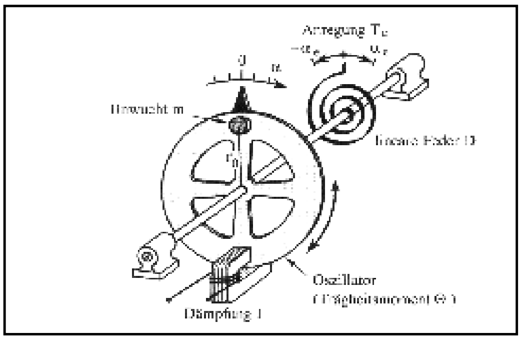
- Das Pohlsche Rad ist ein mechanischer Schwinger und sinnlich leicht erfassbar.
- Die Auslenkungen, die Geschwindigkeiten und die Zeiten liegen in beobachtbaren Skalen.
- Die verschiedenen Parameter können relativ leicht verändert werden. Insbesondere die Stromstärke der Wirbelstromdämpfung kann als sogenannter Kontrollparameter leicht reproduzierbar verändert werden.



Das klassische Pohlsche Rad ist ein linearer Drehschwinger mit der DGL:

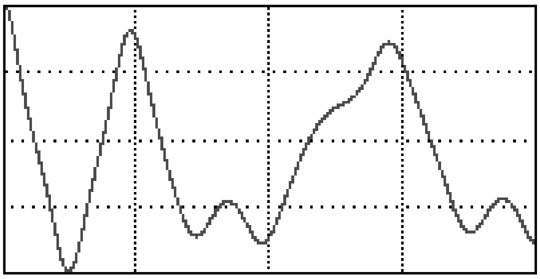
$\Theta \cdot \alpha'' + D \cdot \alpha = 0$ und der
Lösung: $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin\omega t$.

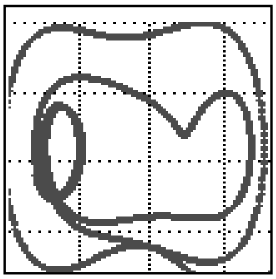
Dabei ist α der Drehwinkel, Θ das Trägheitsmoment, $\Theta \cdot \alpha''$ das Drehmoment und D die Federkonstante der Rückstellfeder mit [D]=Nm/rad.



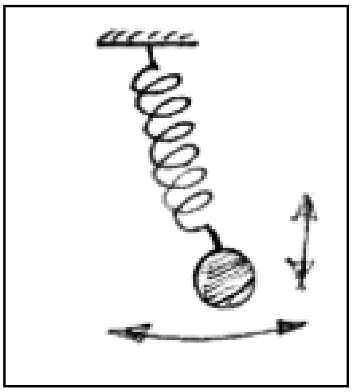
Bei der zusätzlich eingebauten Wirbelstromdämpfung ergänzt man die Differenzialgleichung durch ein zusätzliches Drehmoment
$M_{Dämpfung} = k \cdot I^2 \cdot \alpha'$.
Wenn das Pendel angetrieben wird und das Potenzial durch eine zusätzlich angebrachte Unwuchtmasse nichtlinear zu einer W-Form verändert wird, kann sich Chaos einstellen. Durch den äußeren Antrieb wird dem Drehpendel ein zusätzliches externes Drehmoment
$M_{extern} = D \cdot \alpha_e \cdot \sin\omega_e t$ und durch die Unwuchtmasse m ein zusätzliches Drehmoment
$M_{Unwucht} = mgr_0 \cdot \sin\alpha$ aufgeprägt.
Die komplette DGL lautet:

$$\Theta \cdot \alpha'' + mgr_0 \cdot \sin\alpha + k \cdot I^2 \cdot \alpha' + D \cdot \alpha = D \cdot \alpha_e \cdot \sin\omega_e t.$$





6. Schritt: Alternative anhand einer freien - anharmonisch - gedämpften - zweidimensionalen Schwingung (Feder-Faden-Pendel)

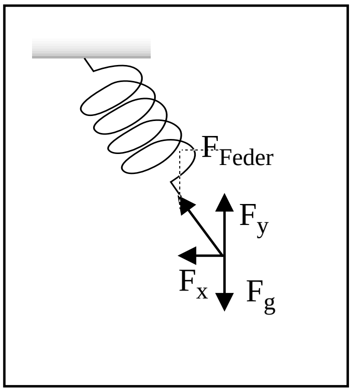


Den dritten Freiheitsgrad als notwendige Bedingung kann man statt durch eine äußere Anregung auch über zweidimensionale Schwingungen erhalten. Man hat dann zwei Weg-Freiheitsgrade und zwei Geschwindigkeits-Freiheitsgrade. Die Kopplung durch den Energiesatz reduziert diese auf drei Freiheitsgrade.

Die DGLen für die beiden Komponenten lauten:

$m \bullet x'' = F_x$ bzw. $m \bullet y'' = F_y - F_g$

Für die Kraft der Feder gilt mit Pythagoras:



$F_{Feder} = k \bullet (l - l_0) = k \bullet ((x^2+y^2)^{1/2} - l_0)$

Mit der Komponentenzerlegung gilt:

$F_y / F_{Feder} = -y/l$ und $F_x / F_{Feder} = -x/l$.

Somit erhält man die DGL:

$x'' = -x \bullet k \bullet [(x^2+y^2)^{1/2} - l_0]/[m \bullet (x^2+y^2)^{1/2}]$

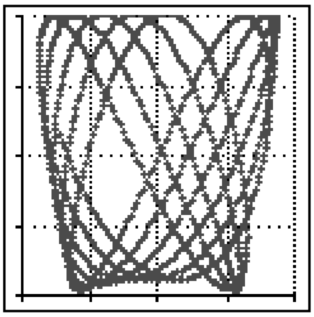
$y'' = -y \bullet k \bullet [(x^2+y^2)^{1/2} - l_0]/[m \bullet (x^2+y^2)^{1/2}] - g.$

Dieses gekoppelte DGL-System kann man nur numerisch lösen, etwa mittels eines Modellbildungssystems. Die Ortskurven sind bei rationalem Periodenverhältnis in T_x/T_y in x- bzw. in y-Richtung wie beim Magnetpendel periodisch verschieden:

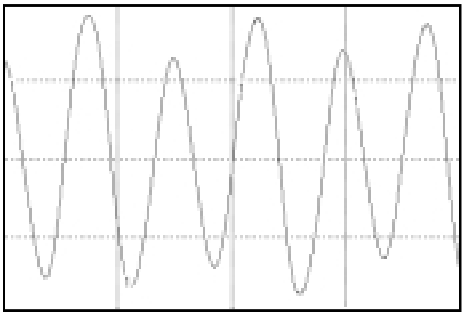
• periodisch geschlossene Bahnkurven, ähnlich den bekannten Lissajoux-Figuren

• periodisch offene Bahnen mit und ohne Spitzen

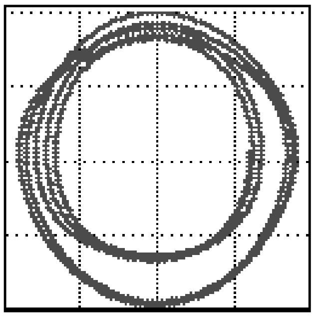
• periodische Bahnen mit Symmetrie zur y-Achse oder symmetrischen Partnerkurven.



x-y-Ortskurve



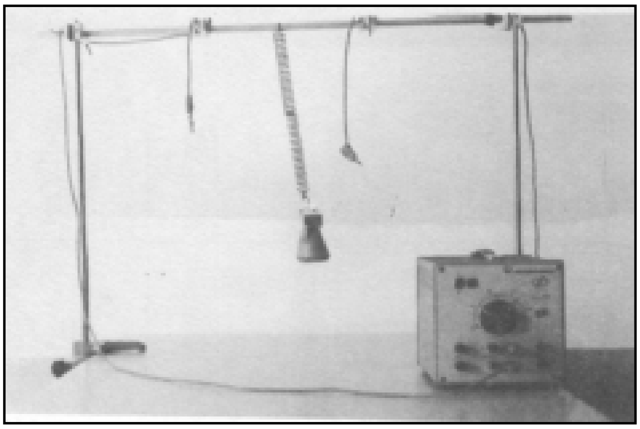
x-Zeitdiagramm



x-x'-Phasendiagramm

Bei nichtrationalem Periodenverhältnis schließt sich die Bahnkurve nicht und es entsteht eine quasiperiodische Bahn, etwa durch geringfügige Veränderung der Anfangsbedingungen.

Auf dem Weg ins Chaos tritt Bifurkation auf. Kommt die Bahnkurve in die Nähe des Aufhängepunktes, ist das Potenzial defokussierend und die Bahnkurve wird chaotisch und flächenfüllend. Poincaré-Schnitte geben hier Auskunft, sind aber für den Unterricht wohl zu schwer. (Eine gute Beschreibung des Feder-Faden-Pendels findet sich in [1], S. 157-168 und in [10], S. 96-104. Dort erfährt man mehr über das Experiment.)



Das Feder-Faden-Pendel lässt sich auf Schulniveau sogar sehr gut durchrechnen und experimentell aufbauen und beobachten. Dazu befestigt man am Gewichtsstück eine Glühbirne, die man über sehr dünne Kupferdrähte mit der Spannungsquelle verbindet.
Eine quantitative Messung ist kaum möglich, da die Schraubenfeder nach kurzer Zeit auch unvermeidbare Torsionsschwingungen durchführt.

2. Fachliche Hintergründe zum Thema Chaos in der Schule

2.1 Bedingungen an chaosfähige Systeme

„Gibt es denn keine einfacheren Experimente, an denen man das Chaos leicht zeigen kann?“ Die Antwort auf diese oft gestellte Frage lautet: Nein, es liegt in der Natur der Sache.

Ein schwingendes System, das chaosfähig ist, muss drei Bedingungen erfüllen:

• Es muss nichtlinear sein, damit das starke Kausalitätsprinzip verletzt ist.

• Es muss eine Stelle sensitiver Abhängigkeit von den Startbedingungen vorliegen. (Das ist besonders dann gut zu erreichen, wenn die Potenzialfunktion ein lokales Maximum hat, etwa ein W-Potenzial.)

• Es muss mindestens drei Freiheitsgrade haben, damit es bei den Trajektorien im Phasenraum keine Überschneidungen gibt, die der Determinismus verbietet.

Das sind notwendige, aber keine hinreichenden Bedingungen an chaosfähige Systeme. Bleibt man bei den eindimensionalen Schwingungen, so erfüllt die erzwungene-anharmonisch-gedämpfte Schwingung entsprechenden Potenzials gerade diese Bedingungen. Unterhalb dieser Kategorie gibt es im eindimensionalen Bereich kein Chaos. Die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ist die Anzahl der Freiheitsgrade, die den Phasenraum bilden, vermindert um die Anzahl der im System geltenden Erhaltungssätze. Es ist die minimale Anzahl von Variablen, mit denen man das System beschreiben kann.

Die DGL 2. Ordnung kann in ein System von drei (Anzahl der effektiven Freiheitsgrade) DGLen 1. Ordnung überführt werden.

$s' = v$

$v' = -R/m \cdot v - D/m \cdot s - N/m \cdot s^3 + F_0/m \cdot \sin\Omega$

$\Omega' = \omega_{err}$

Nichtlinearität:
• bewirkt, dass das System außer Tritt kommen kann und stolpert
• kleine Änderungen haben große Wirkungen
• Die Nichtlinearität koppelt Frequenz und Amplitude

$$\mathbf{m \cdot s'' + R \cdot s' + D \cdot s + N \cdot s^3 = F_0 \cdot \sin(\omega_{err} \cdot t + \varphi_0)}$$

2. Freiheitsgrad: s'

1. Freiheitsgrad: s

3. Freiheitsgrad: ω_{err}
(ermöglicht die dritte Koordinate im Phasenraum)

(a) Die Rolle der Nichtlinearität

Nichtlinearität ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung sowohl für das Entstehen von ‚Chaos aus Ordnung' (Deterministisches Chaos), als auch für die Entstehung von ‚Ordnung aus Chaos' (Synergetik).

- Sie bewirkt einmal das Stolpern eines angetriebenen nichtlinearen Oszillators oder einer Reihe gekoppelter nichtlinearer Oszillatoren, d. h., dass diese aus dem Tritt geraten. Die Frequenz ist im Gegensatz zu linearen Oszillatoren nicht mehr amplitudenunabhängig. Es gilt nicht mehr das additive Superpositionsprinzip, wie es für lineare Schwingungen (Parabel-Potenzial) charakteristisch ist. Demzufolge können bei nichtlinearen Schwingern neue Kombinationsfrequenzen entstehen, wenn sie periodisch mit verschiedenen Frequenzen angetrieben werden. Veränderliche Amplitudenwerte ändern die Taktfrequenzen der Schwinger. Da dies bei gekoppelten Oszillatoren nicht im Gleichklang geschehen muss, können sie außer Tritt geraten und es entsteht Chaos.
- Umgekehrt sind nichtlineare Systeme leichter zu synchronisieren als lineare Systeme. Durch die Kopplung zwischen Auslenkung und Frequenz kann das Schwingungssystem flexibler auf äußere Kräfte reagieren. Das additive Superpositionsprinzip ist nämlich durch das multiplikative Ähnlichkeitsprinzip ersetzt: Eine Änderung der Längenskala (bei der Amplitude) ist mit einer entsprechenden Änderung der Zeitskala (bei der Schwingungsdauer bzw. Frequenz) verbunden. Durch Phasenkopplung benachbarter Frequenzkomponenten können spektrale Anteile verschwinden, d. h., das System synchronisiert sich. Es kommt zu synergetischen Effekten (vgl. [4], S. 46).

Ein einfaches Beispiel ist der sogenannte HUYGENS-Effekt:

Stellt man zwei Metronome auf eine feste Tischplatte, laufen sie trotzdem bei anfänglicher Synchronisation infolge kleinster Gangunterschiede alsbald auseinander. Stellt man dieselben Metronome auf eine schwingungsfähige Schaukel, so schwingen sie synchron. Die Phasenkopplung hat benachbarte Frequenzen ausgelöscht (vgl. [4], S. 57).

(b) Die Rolle der Sensitivität

Nichtlinearität ist nicht hinreichend für chaotische Schwingungen. Das wird einsichtig, wenn man sich das Potenzial vergegenwärtigt. Das Potenzial einer linearen Schwingung ist als Wegintegral über die Kraft-Weg-Funktion (hookesches Gesetz) eine Parabel zweiten Grades. (Kubische) Nichtlinearitäten geben dem Potenzial eine W-Form. Durch die Existenz zweier Potenzialmulden vermag das System chaotisch zwischen beiden hin und her zu springen. Im Bereich des Potenzialwalls ist das System hochsensitiv.

(c) Die Rolle des 3. Freiheitsgrades

Die äußere Anregung, als 3. Freiheitsgrad, ist ebenfalls sowohl für das Entstehen von ‚Chaos aus Ordnung' (Deterministisches Chaos), als auch für die Entstehung von ‚Ordnung aus Chaos' (Synergetik) bedeutsam.

• Für das deterministische Chaos erlaubt die äußere Anregung bei eindimensionalen Schwingungen den dritten Freiheitsgrad. Der Determinismus verbietet, dass sich Trajektorien im Phasenraum schneiden (Kreuzungsverbot). Ansonsten wären die Lösungen der Bewegungsgleichungen nicht eindeutig. In einem zweidimensionalen Phasenraum, beispielsweise bei einer eindimensionalen Schwingung, sind nur drei Bewegungstypen möglich:

a. Die Trajektorie im Phasenraum spiralt sich auf, d. h., das System kommt durch Reibung zur Ruhe.

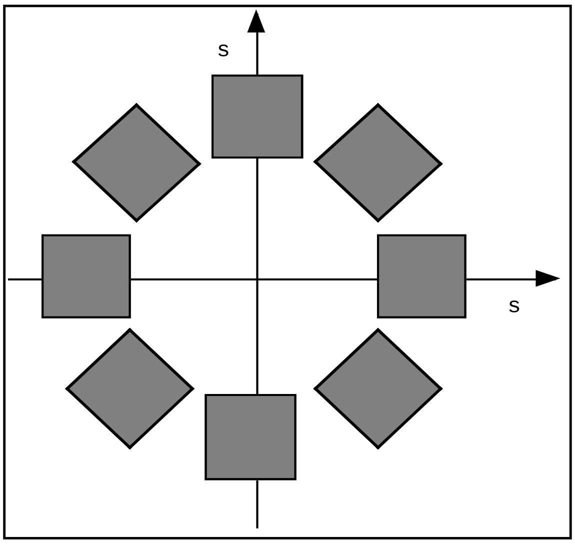
b. Die Trajektorie geht in einen geschlossenen Grenzzyklus, d. h., das System ist periodisch wie eine immergehende Uhr.

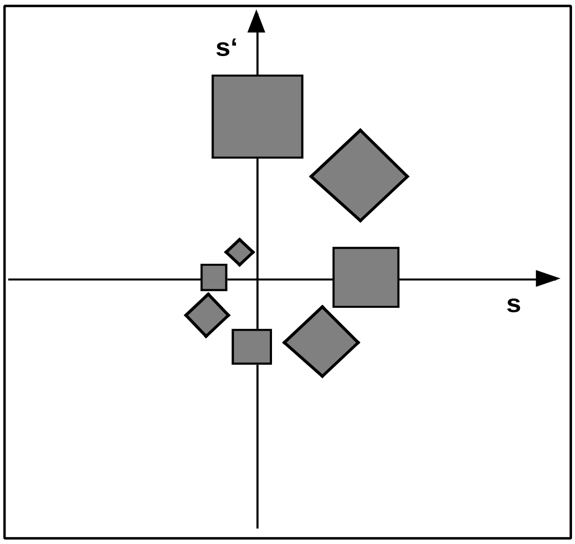
c. Die Trajektorie spiralt infolge negativer Dämpfung ins Unendliche auf, d. h., das System explodiert.

In Systemen mit einem zweidimensionalen Phasenraum kann es somit kein Chaos geben. Um der Einschränkung des Überschneidungsverbots zu entgehen, muss man in den mindestens dreidimensionalen Phasenraum ausweichen. Der dritte Freiheitsgrad, die dritte Dimension im Phasenraum, kann bei Schwingungen erreicht werden durch Übergang zu zweidimensionalen Schwingungen oder durch eine äußere Anregung eindimensionaler Schwingungen.

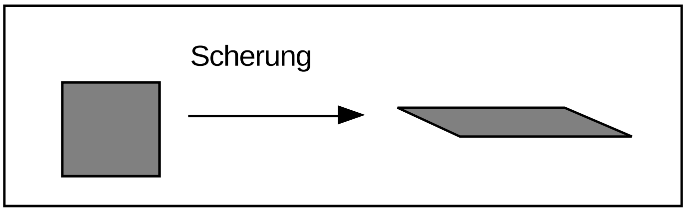
• Der dritte Freiheitsgrad hat bei angetriebenen nichtlinearen Oszillatoren im Phasenraum noch eine topologische Folge: die Rückfaltung im Phasenraum.

Betrachtet man im zweidimensionen Phasenraum einer eindimensionalen Schwingung ein Phasenraumvolumen, etwa eine quadratische Fläche, so bleibt das Phasenraumvolumen in einem konservativen System in seiner zeitlichen Entwicklung konstant. Das ist eine unmittelbare Folge des Energiesatzes und des LIOUVILLE-Theorems. In einem dissipativen System, etwa durch Reibung, zieht sich das Phasenraumvolumen auf den Punktattraktor zusammen.

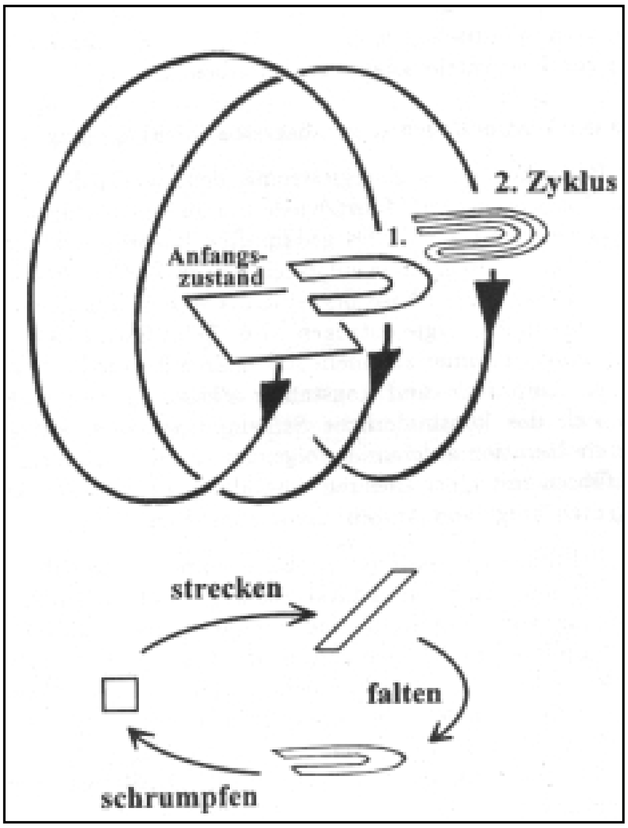




Bei konservativen linearen Schwingern bleibt nicht nur das Phasenraumvolumen zeitlich konstant, sondern auch dessen Form bleibt erhalten. Bei nichtlinearen Schwingern ist das ganz anders. Anfangszustände, die einer hohen Energie ($E=1/2ms^2 + 1/2Ds'^2$) entsprechen, laufen im Phasenraum aufgrund der Nichtlinearität schneller um, als Anfangszustände mit kleiner Energie. Das quadratische Phasenraumvolumen wird gestreckt (Divergenz) und gestaucht (Konvergenz), also geschert.



Benachbarte Trajektorien können zwar etwas auseinanderlaufen, aber wegen des Kreuzungsverbots und der Beschränkung auf den zweidimensionalen Phasenraum nicht in so dramatischem Umfang, dass sich Chaos ergibt. Das ist erst im dreidimensionalen Phasenraum als Rückfaltung möglich. Wird der nichtlineare Schwinger periodisch angestoßen, so entspricht das einer Rückfaltung der Phasenraumfläche in der dritten Dimension, sodass bei jedem Antriebszyklus sukzessive neue Faltungen dazukommen. Ein POINCARE-Schnitt durch die dritte Dimension zeigt im Grenzzyklus ein fraktales Gebilde mit selbstähnlicher Struktur, einen sogenannten seltsamen Attraktor. (vgl. [4], S. 51)



2. 2 Merkmale chaosfähiger Schwingungssysteme

(a) Quantitative Beschreibungen

• Darstellung im Frequenzspektrum über Fouriertransformation

• Feigenbaum-Darstellung

• stroposkopische Abbildung

• Lorenz-Abbildung

• Poincaré-Abbildung

• Ljapunov-Exponent

• Kolmogorov-Entropie

• „Bei vollständig ausgebildeter Turbulenz sind im Frequenzspektrum keine diskreten Schwingungsfrequenzen mehr zu erkennen. Diese Tatsache kann als eine mögliche Definition für eine bestimmte Klasse von chaotischen Zuständen herangezogen werden,... Eine allgemeine Definition für Chaos existiert bis dato noch nicht." ([8], S. 207-230)

• „Da eine analytische Beschreibung einer chaotisch verlaufenden Evolution, ausgehend von bekannten Randbedingungen, nicht möglich ist, kann man bestenfalls mit statistischen Methoden arbeiten. ... aber nach dem Feigenbaum-Diagramm kennt man wenigstens die Extremalwerte der Fluktuationen." ([8], S. 207-230)

• „Bis heute existiert noch kein allgemeines, universell anwendbares Diskretisierungsverfahren. Je nach Systemstruktur und -dynamik kann ein partikuläres Verfahren angewandt werden. Ziel solcher Abbildungen (z.B. stroposkopische Abbildung, J.L.) ist es, die chaotischen Lösungen von komplizierten Differenzialgleichungen auf das bekannte chaotische Verhalten von einfachen Iterationsfunktionen zurückzuführen. .. Ein möglicher Weg, diese Potenzreihendarstellungen aus Differenzialgleichungen zu erhalten, ist die iterative numerische Integration nach Euler oder Runge-Kutta und die Polynomapproximation von Tschebyscheff. Als Algebrasprache eignet sich REDUCE." ([8], S. 207-230)

• „Aus dieser Lorenz-Abbildung kann man eine Symbolfolge konstruieren.... Diese Folge steht stellvertretend für die Bahn im Phasenraum. " ([8], S. 207-230)

• „Die Poincaré-Abbildung ... stellt eine weitere Diskretisierungsmethode dar. Symbolfolgen erhält man auf die gleiche Weise (nummerierte Schnittpunkte der Trajektorien mit zweidimensionalen Flächen im Phasenraum, J.L.). Die Anzahl und Lage der Durchstoßpunkte gibt Information über die Art der Bewegung." ([8], S. 207-230)

• „Der Ljapunov Exponent (beschreibt die Änderung des Phasenraumvolumens, J.L.) bildet ein wichtiges Element in der Stabilitätsanalyse, mit dessen Hilfe man stabile Fixpunkte, stabile Grenzzyklen oder chaotische Bewegungen, sogenannte seltsame Attraktoren, unterscheiden kann. ... Leider gibt es noch kein universelles Rezept zum Auffinden von Ljapunov Exponenten." ([8], S. 207-230)

• „Die Kolmogorov Entropie ist auch ein Maß für den chaotischen Zustand eines dynamischen Systems, wenn die Zustände exponentiell anwachsen. ... Noch ist man weit davon entfernt, die Kolmogorov Entropie als ein universelles Werkzeug zum Verständnis dynamischer Systeme gebrauchen zu können. “ ([8], S. 207-230)

(b) Der Weg ins Chaos zeigt sich an

• Abklingen des Einschwingvorganges

• Bifurkation

• Feigenbaum-Diagramm

• Intermittenz

(c) Das System ist sensitiv abhängig von Startbedingungen und Störungen

• sensitive Abhängigkeit

• exponentielles Fehlerwachstum

• Ljapunov-Exponent

(d) Das System verhält sich nicht 'additiv' sondern 'multiplikativ'

• Rückfaltung im Phasenraum

• multiplikative Selbstähnlichkeit (Länge-Zeit-Skalenverknüpfung)

• fraktale Dimension

• Selbstorganisation und Synchronisation

(e) Im chaotischen Bereich gibt es Strukturen

• fraktale Strukturen

• Poincaré-Schnitte

• Feigenbaum-Diagramm

• Bäcker-Transformation

• Rückabbildung

2.3 Der Zusammenhang zwischen mindestens dreidimensionalen Phasenräumen und eindimensionalen Diskretisierungen (z. B. logistische Gleichung)

(a) Zitate

"In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst empirisch mit einer ganz speziellen diskreten nichtlinearen Abbildung befassen, die trotz ihrer einfachen Bauart eine Vielfalt von Phänomenen aufweist, die typisch für nichtlineares Verhalten sind. Anfang der siebziger Jahre hatte sich der Biologe Robert M. May mit der Dynamik von Tierpopulationen auseinandergesetzt. Zur Beschreibung des einfachsten Falls von zeitlich nicht überlappenden Generationen verwendete er Differenzengleichungen 1. Ordnung $x^{n+1}=f(x^n)$, die es ermöglichten, die Population x^{n+1} im Jahre n+1 aus der Population des vorhergehenden Jahres zu ermitteln (May, 1976)." ([5], S. 70)

"Durch jeden Punkt des Phasenraumes verläuft genau eine Phasenkurve oder Trajektorie. Physikalisch bedeutet dies, dass, wenn zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Zustand bekannt ist, sowohl die Zukunft als auch die Vergangenheit durch Integration determiniert sind. Das heißt auch, dass sich Trajektorien, die eine eindeutige Lösung darstellen, niemals schneiden können" ([5], S. 33).

"Es sei jedoch angemerkt, dass man die Abbildungsfunktion f (POINCARÉ-Abbildung, J.L.) normalerweise nicht explizit ermitteln kann. Daher ist man weiterhin auf numerische Integration angewiesen und kann keine Einsparung von Rechenzeit erwarten. Der Vorteil der Poincaré-Abbildung besteht also in erster Linie darin, dass man die Dimension des Systems um eins reduziert, wobei die Erfahrung zeigt, dass dabei keine wesentliche Information über das Langzeitverhalten der Trajektorien verlorengeht.

Die Theorie dynamischer Systeme hat nun durch einen weiteren Abstraktionsschritt entscheidende Impulse erhalten. Ist man nämlich nicht am detaillierten Verhalten eines speziellen dynamischen Systems interessiert, sondern an allgemeinen qualitativen Eigenschaften ganzer Klassen von dynamischen Systemen, so kann man sich vom Studium der Differenzialgleichungen bzw. ihrer Poincaré-Abbildungen ganz lösen und direkt die allgemeinen Eigenschaften von Rekursionsformeln untersuchen. Durch die explizite Angabe der Abbildungsfunktion sind numerische Integrationen nicht mehr notwendig, so dass sich die Rechenzeit zwischen zwei Poincaré-Schnitten auf die Zeit zur Ausführung eines Iterationsschritts reduziert. Man kann sich also sehr schnell einen Überblick über das Langzeitverhalten des Systems verschaffen und erzielt außerdem eine höhere Rechengenauigkeit, da ja Fehler infolge numerischer Integrationen nicht mehr auftreten. Wählt man insbesondere eine umkehrbar eindeutige Abbildungsvorschrift, so lässt sie sich als Poincaré-Abbildung eines dynamischen Systems interpretieren. In ... werden wir uns am Beispiel eines konservativen Systems mit zwei Freiheitsgraden, der sogenannten Hénon-Abbildung, ausführlicher mit einer solchen Rekursionsvorschrift beschäftigen." ([5], S. 65 f.)

"Für eine qualitative Betrachtungsweise ist in erster Linie das Langzeitverhalten der Trajektorie für $t \to \infty$ von Interesse. dazu genügt es, mit Hilfe eines Poincaré-Schnitts S von Zeit zu Zeit 'Stichproben' vom jeweiligen Ort der Bahnkurven vorzunehmen, wobei sich alle wesentlichen Eigenschaften des Systems in der Poincaré-Abbildung widerspiegeln. ... Ist man nicht an einem speziellen dynamischen Problem interessiert, sondern an allgemeinen Eigenschaften von Hamilton-Systemen, so kann man dazu übergehen, direkt nichtlineare flächentreue iterierte Abbildungen zu studieren. ...

Als Prototyp einer Poincaré-Abbildung eines Hamilton-Systems mit zwei Freiheitsgraden soll eine flächentreue Abbildung T der x,y-Ebene auf sich selbst ... (, die Hénon-Abbildung, J.L.) ... konstruiert werden." ([5]), S. 117)

"Die Interpretation einer nicht-monotonen Funktion als Poincaré-Abbildung ist allerdings nur näherungsweise möglich, beispielsweise in Systemen, die eine starke Dissipation aufweisen. Würden die Trajektorien exakt auf einer zweidimensionalen Fläche liegen, so wäre die Poincaré-Abbildung streng eindimensional und müsste wegen der Determiniertheit des Systems bzw. der Kreuzungsfreiheit der Trajektorien umkehrbar eindeutig sein. Eindimensionale eineindeutige Iterationsvorschriften können aber nur reguläres Verhalten beschreiben. Dies deckt sich natürlich mit der Tatsache, dass im zweidimensionalen Phasenraum keine chaotischen Bewegungen möglich sind. Die eigentliche Ursache für das Auftreten eines komplexen Langzeitverhaltens liegt in der Doppelwertigkeit der Umkehrabbildung." ([5], S. 365 f.)

"Experimentell werden Periodenverdopplungen, Chaos und Intermittenz in ganz verschiedenen Systemen, wie Flüssigkeiten, chemischen Reaktionen, elektronischen Geräten etc. gefunden. In all diesen Fällen besitzen die Systeme eine große Zahl von Freiheitsgraden. Daher mag es auf einen ersten Blick als ein Rätsel erscheinen, warum das Verhalten solcher Systeme von einer einzigen Variablen x^n beschrieben werden kann. Die Antwort liegt im Versklavungsprinzip, ... Diesem Prinzip gemäß kann das Verhalten des Gesamtsystems in der Nähe von Instabilitätspunkten durch sehr wenige Freiheitsgrade, nämlich den Ordnungsparametern, bestimmt werden. Bereits drei Ordnungsparameter genügen, um Chaos zu erzeugen. In diesem Raum der drei Ordnungsparameter kann man eine Poincaré-Abbildung in Analogie etwa zu (der logistischen Gleichung, J.L.) herstellen, und wir erhalten somit sofort einen Zugang zu einer eindimensionalen diskreten Abbildung. Im Fall, dass die zur Poincaré-Abbildung führenden Schnittpunkte z.B. zunächst in einer Ebene liegen, kann in einer Reihe von Fällen numerisch nachgewiesen werden, dass die Punkte durch eine glatte Kurve, die sich zu einer Geraden strecken lässt, verbunden werden können." ([6], S. 358)

(b) Anmerkungen

Am Anfang der logistischen Gleichung standen die Untersuchungen von Robert MAY über Tierpopulationen. Und die logistische Gleichung ist eindimensional. Es stellt sich die Frage, warum es sich die Physiker so schwer machen, wenn es doch auch eindimensional geht. Nun, der Zusammenhang ist der, dass die logistische Gleichung eine Diskretisierung des Systemverhaltens auf eine eindimensionale Gleichung darstellt, eine Datenreduktion um mehrere Dimensionen, wenn man so will. Die logistische Gleichung als Rückabbildung entsteht über eine erste Datenreduktion um eine Dimension, den Poincaré-Schnitt. Aus dem Poincaré-Schnitt kann man wiederum in einem zweiten Schritt ggf. eine Iterationsfunktion (z.B. logistische Gleichung) bekommen, erraten etc., ohne dass Information über das Langzeitverhalten (!) verloren geht, wobei aber die Rechenzeit extrem verkürzt wird, was bei dem Poincaré-Schnitt nicht der Fall ist. Eine Rückabbildung, so etwas wie die logistische Gleichung, ist im Einzelfall nicht leicht zu bekommen. Es ist aber ein probates Mittel, um Langzeitverhalten ganzer Klassen (!) von dynamischen Systemen zu studieren.

Auf den Physikunterricht bezogen kann man feststellen:

Die Schulbücher beschreiben nette Experimente, reden von Bifurkation, Chaos, Attraktoren etc. Das alles geschieht auf der Basis der Anschauung und qualitativer Freihandexperimente. (Im GK ist auch nicht mehr zu erreichen.) Und dann kommt der berühmte Satz in den Büchern: "Die logistische Gleichung tut das auch." Dann wird mit der logistischen Gleichung auf dem Taschenrechner experimentiert, es werden Bifurkationen etc. gefunden. Dann kommt der Sprung zurück zum Pohlschen Rad oder ähnlichem. Aber dazwischen liegt viel: Poincaré-Abbildung, Rückabbildung, Iterationsfunktion und viele Zusammenhänge, die zu durchschauen nicht so einfach sind. Die logistische Gleichung ist durch ihren schnellen Zugriff verführerisch, der Weg über Phasenräume, Poincaré-Schnitte, Rückfaltungen, etc. ist begrifflich anstrengend, legt aber die Bedingungen für Chaos klar. Chaos braucht eine Mindestfreiheit, nämlich drei Freiheitsgrade. Das von Robert MAY untersuchte Ökosystem hat mehr Freiheitsgrade als nur einen.

Vergleichen wir es mit dem System Wetter: Zustandsgrößen sind Druck, Temperatur, Energie, Entropie, Dichte, Volumen, ...etc. Ich messe alle 24 Stunden nur die Temperatur T, analog der Messung der Tierpopulation im jährlichen Abstand, und trage immer die gestrige Temperatur gegen die heutige auf. So erhalte ich eine eindimensionale Funktion $T_{heute} = f(T_{gestern})$. Leider ist der Zusammenhang nur in Daten und nicht in einem schönen funktionalen Zusammenhang beschrieben, wie R. MAY ihn ansetzt. An dieser eindimensionalen Funktion könnte ich das Langzeitwetter in einer wesentlichen Zustandsgröße studieren. Das erlaubt aber nicht zu sagen, mein System ‚Wetter' sei eindimensional. M.a.W. die logistische Gleichung ist ein eindimensionales Modell, das durch extreme Datenreduktion (=Phasenraumreduktion über verschiedene Schritte) zustande kommt.

IV. Literatur

[1] WORG, Roman: Deterministisches Chaos: Wege in die nichtlineare Dynamik. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1993.

[2] MAHNKE, R.; J. SCHMELZER und G. RÖPKE: Nichtlineare Phänomene und Selbstorganisation.
Stuttgart: Teubner 1992.

[3] BIGALKE, Hans-G.: Chaostheorie und Fraktale Geometrie im Mathematikunterricht? Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 1(1996), 40-52.

[4] KUHN, W. (Hrsg.): Physik Band II Lehrerband
Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag 1994.

[5] ARGYRIS, John; Gunter FAUST und Maria HAASE: Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung für Naturwissenschaftler und Ingenieure.
Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1994.

[6] HAKEN, Hermann: Synergetik. Eine Einführung. Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie.
Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1983.

[7] LEISEN, Josef: Modellbildungssysteme - Didaktische und methodische Aspekte. Praxis der Naturwissenschaften - Physik 3(1999), 1-3.

[8] LÜSCHER, E.: Zur Physik des Chaos. Physik und Didaktik 3 (1989), 207-230.

[9] BACKHAUS, U. und H. J. SCHLICHTING: Auf der Suche nach der Ordnung im Chaos. Der mathematische und naturwissenschafliche Unterricht 8 (1990), 456-466.

[10] HEINRICHS, Georg: Chaos. Einführung in eine neue physikalische Theorie.
Köln: Aulis Verlag Deubner 1992.

[11] THOMPSON, J.M.T. und H.B. STEWART: Nonlinear Dynamics and Chaos. geometrical Methods for Engineers and Scientists.
Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons. 1986.

[12] Videofilm zum Pohlschen Rad. Videografierte Realaufnahmen mit charakteristischen Szenen. Zu beziehen beim ILF Mainz.

V. Anhang

A. LEISEN, Josef: Modellbildungssysteme - Didaktische und methodische Aspekte. Praxis der Naturwissenschaften - Physik 3(1999), 1-3.

B. GÖTTMANN, Bernd; Jörn NOLTE: Chaotisches Verhalten eines einfachen mechanischen Pendels, registriert mit dem CASSY-System. Contact - Zeitschrift der Leybold Didactic GmbH 2(1992), 4-6.

C. Kursarbeit: Harmonische Schwingungen und Chaos

B. Abiturarbeit: Schwingungen und Chaos

Wir danken den Verlagen für die erteilte Abdruckerlaubnis.

Die TIMS-Studie hat belegt, dass durch die moderne Physik ein beachtlicher Lernzuwachs erreicht wird. "Wenn man die Testergebnisse analysiert, sieht man, daß in der 13. Klasse in der modernen Physik ein echter Sprung stattfindet, aber auch in anderen Stoffgebieten dazugelernt wird. Unsere Erklärung ist, daß mit der Einführung der modernen Physik der Unterricht generell eine neue theoretische Perspektive gewinnt, die es erlaubt, auch andere Bereiche besser zu verstehen. Es ist ein Glücksfall, daß die moderne Physik etwas wirklich Integrierendes hat." (Prof. Dr. Jürgen Baumert)

Neben der Quantenphysik zwingt uns die Chaostheorie zu ungewohnten Welt-Sehweisen. Die Physik des deterministischen Chaos hat dem Paradigma der Berechenbarkeit der Welt ein Ende gesetzt, mehr noch: sie hat die Bedeutung der Nichtlinearität für das Funktionieren dieser Welt gezeigt. Nichtlinearität wirkt in zwei Richtungen: in das Chaos und in die Ordnung. Sie ist einerseits eine notwendige Bedingung dafür, dass Systeme chaotisch werden können und andererseits dafür, dass durch Selbstorganisation in ungeordneten dynamischen Systemen eine Ordnung entsteht (z. B. beim Laser). Beschreibungskonzepte für dynamische Systeme gehören ungeachtet der fachübergreifenden Bezüge heute zur naturwissenschaftlichen Grundbildung.

In dieser Handreichung wird die Chaosphysik exemplarisch an nichtlinearen Schwingungen behandelt und es wird ein unterrichtserprobter Weg vom harmonischen zum chaotischen Schwinger gezeichnet.

ISSN 0938-748X

Pädagogisches Zentrum
Rheinland-Pfalz
Bad Kreuznach