

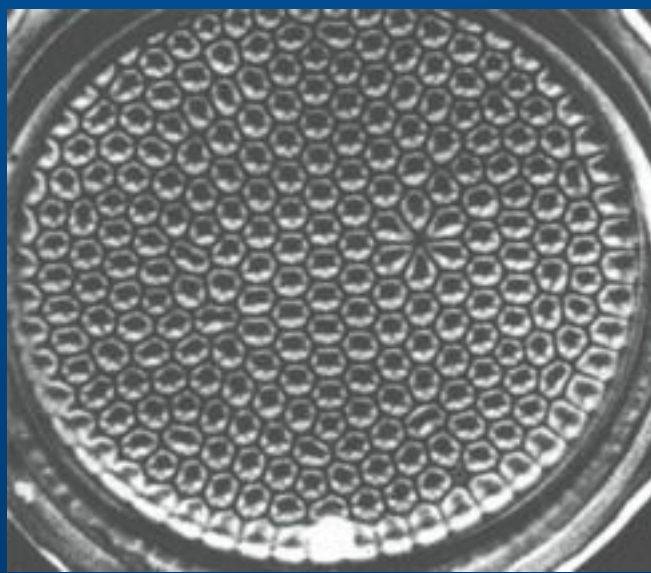
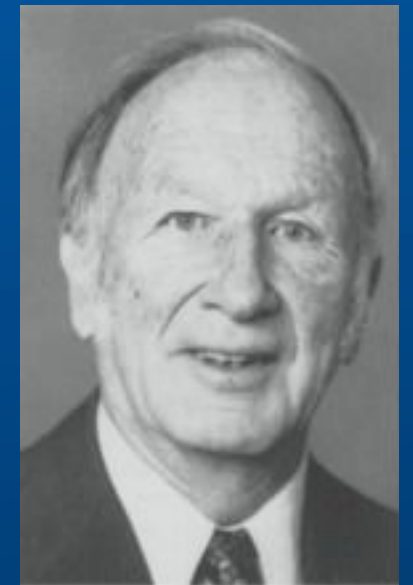
DIE ERFORSCHUNG DES CHAOS

Experimente, Ideen und
Entwicklung der Chaostheorie

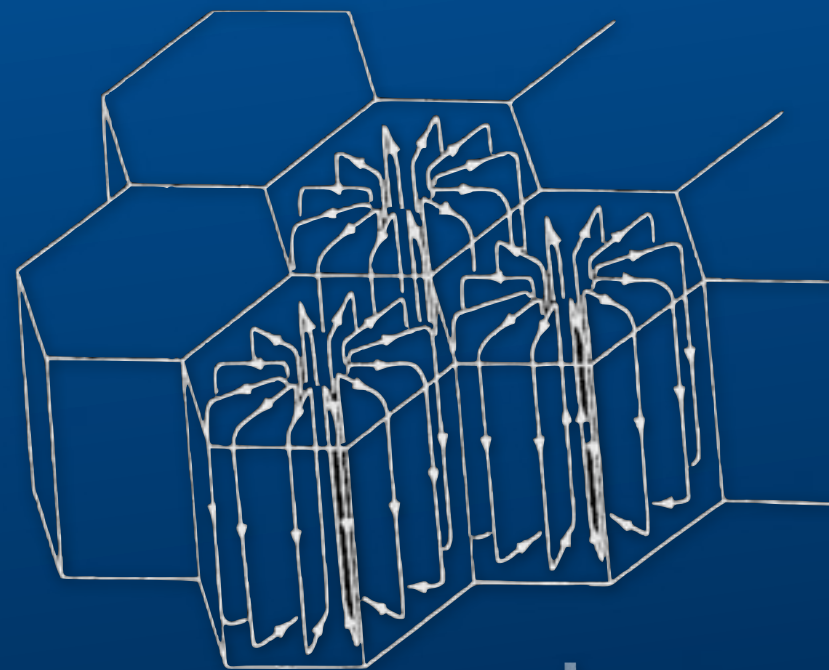
Stephan Lück

URSPRÜNGE DER CHAOSTHEORIE

Edward Lorenz (1917-2008) Meteorologe
einfaches Atmosphärenmodell (ca. 1960)
basierend auf Konvektion



Modellexperiment

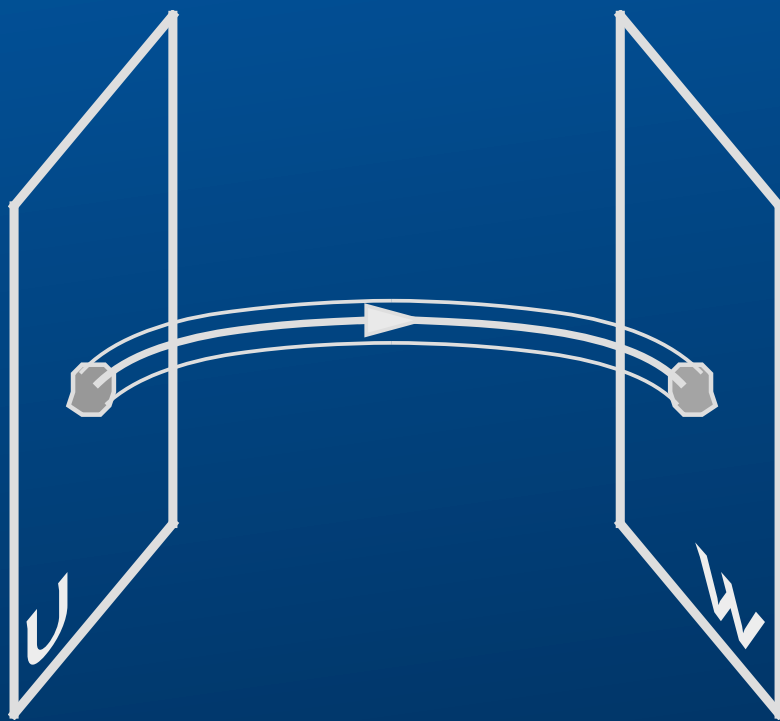


$$\begin{aligned}x' &= a \cdot (y - x) \\ y' &= x \cdot (b - z) - y \\ z' &= x \cdot y - c \cdot z\end{aligned}$$

KAUSALITÄT

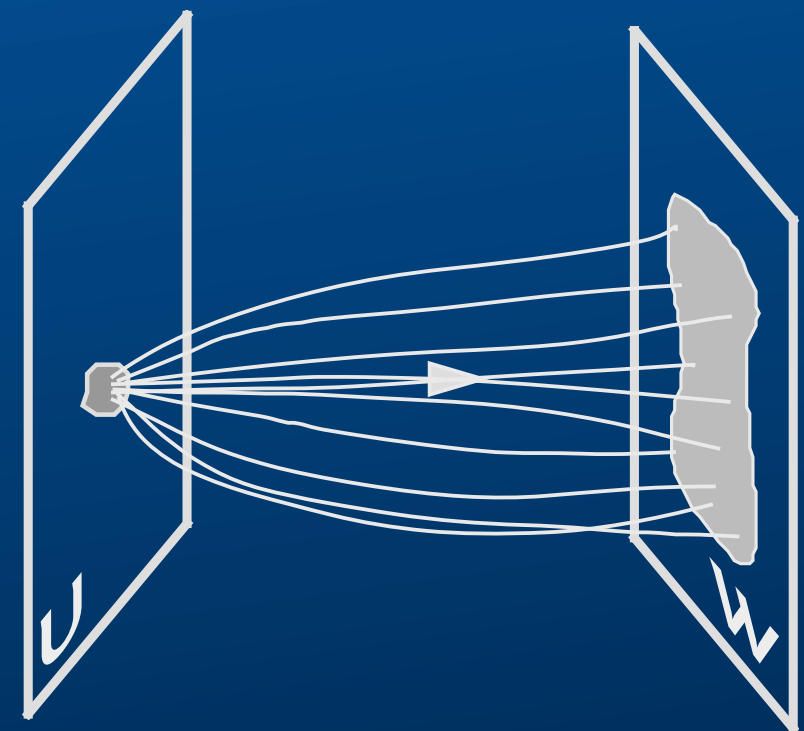
Eindeutige Beziehung von Ursache und Wirkung

starke Kausalität



ähnliche Ursachen
ähnliche Wirkung

schwache Kausalität



ähnliche Ursachen
sehr verschiedene Wirkung

KAUSALITÄT

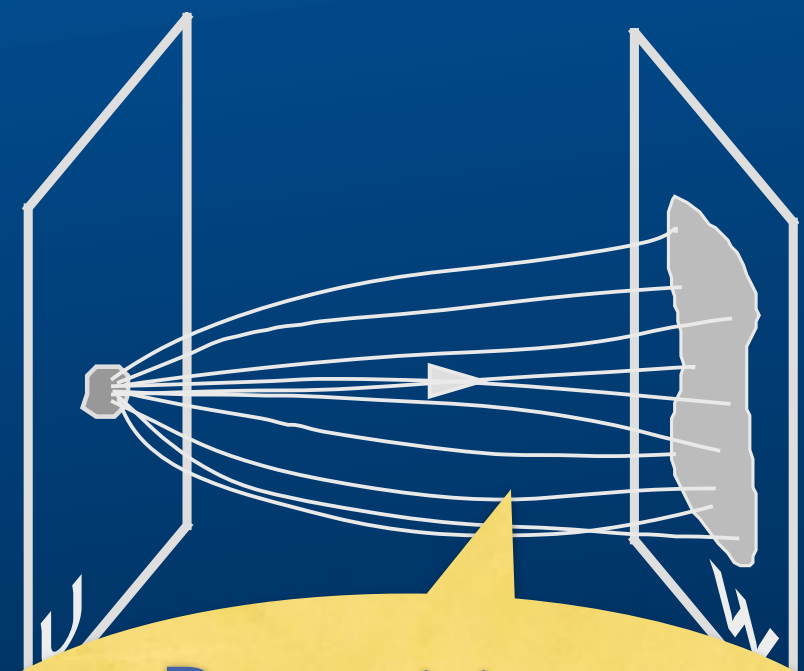
Eindeutige Beziehung von Ursache und Wirkung

starke Kausalität



Grundlage der
Erkenntnisgewinnung durch
Experimente

schwache Kausalität



Determinismus
bleibt erhalten!
kein „völliges Chaos“

PHASENRAUM / TRAJEKTORIE

Phasenraum:

Das Verhalten (Dynamik) eines physikalischen Systems wird durch zeitlich veränderliche Größen beschrieben.

Der Phasenraum eines Systems besteht aus allen Punkten eines Satzes von Größen, der ausreicht, um das System zu beschreiben.

Pendel: Winkel und seine Geschwindigkeit: $\varphi(t)$ und $\omega(t)$

Trajektorie:

Die Entwicklungslinie, die sich aus den im Laufe der Zeit angenommenen Werten der Phasenraumvariablen ergibt, nennt man Trajektorie.

ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

Mögliche Attraktoren:

Grundregel:
Trajektorien dürfen sich
nicht schneiden!

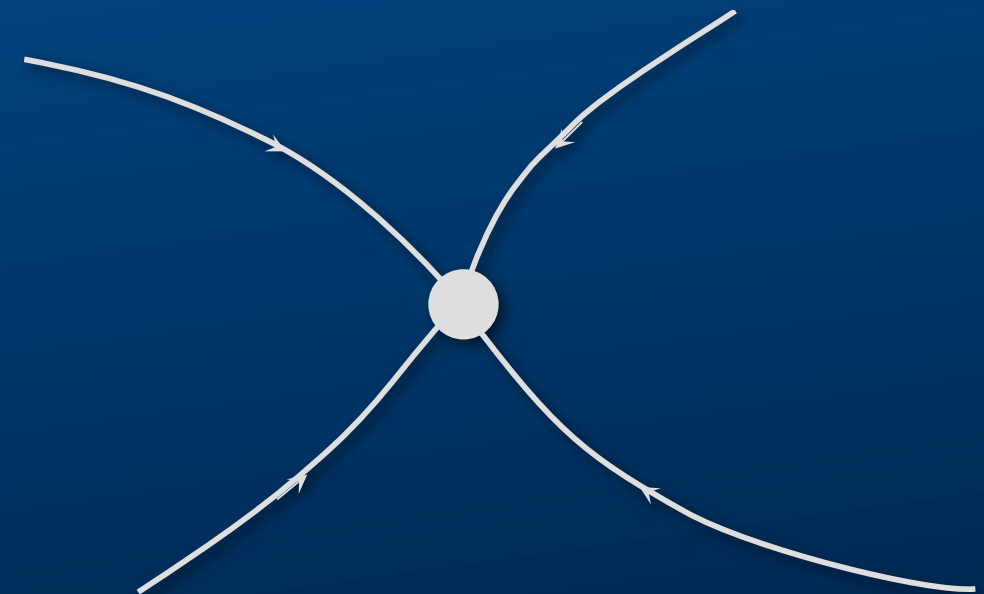
ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

Mögliche Attraktoren:

Fixpunkt (mind. 1-dim)



ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

Mögliche Attraktoren:

Fixpunkt (mind. 1-dim)

Grenzyklus (mind. 2-dim)



ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

Mögliche Attraktoren:

Fixpunkt (mind. 1-dim)

Grenzyklus (mind. 2-dim)

Torus (mind. 3-dim)



ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

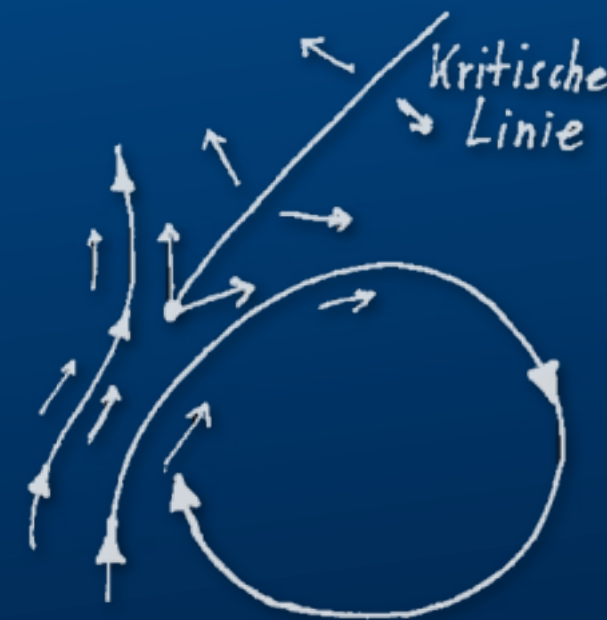
Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

Mögliche Attraktoren:

Fixpunkt (mind. 1-dim)

Grenzyklus (mind. 2-dim)

Torus (mind. 3-dim)



ATTRAKTOR

Ein Attraktor ist dasjenige Gebiet in einem Phasenraum, auf die sich die Trajektorien eines (dynamisches) Systems im Laufe der Zeit zubewegt.

Ein Attraktor gibt das Langzeitverhalten des Systems wieder.

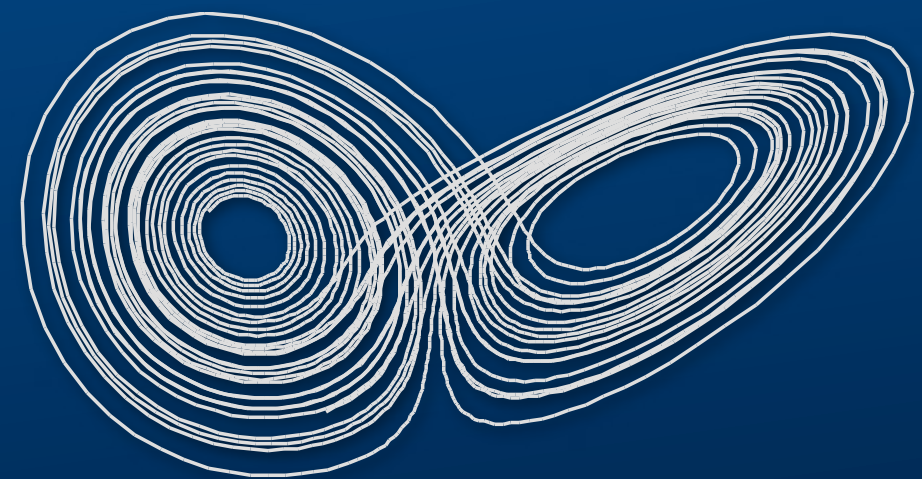
Mögliche Attraktoren:

Fixpunkt (mind. 1-dim)

Grenzyklus (mind. 2-dim)

Torus (mind. 3-dim)

seltsamer Attraktor (mind. 3-dim)



WANN IST CHAOTISCHE DYNAMIK MÖGLICH???

schwache Kausalität

→ auseinander laufende Trajektorien

→ „zurückfalten“

mindestens 3 Dimensionen &
Streck-Falt-Mechanismus

DER RÖSSLER - ATTRAKTOR

„Zusammengebautes Chaos“

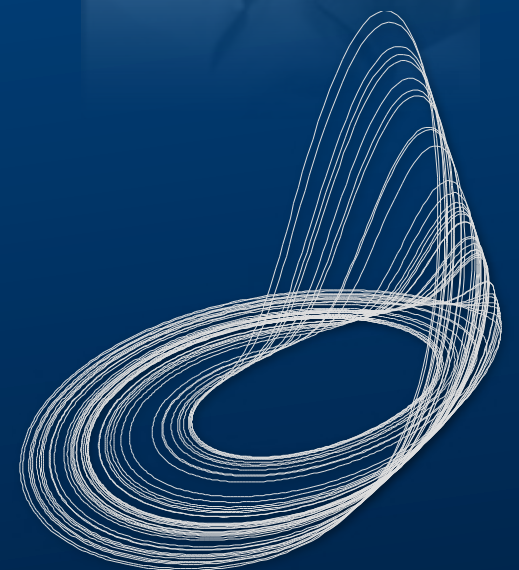
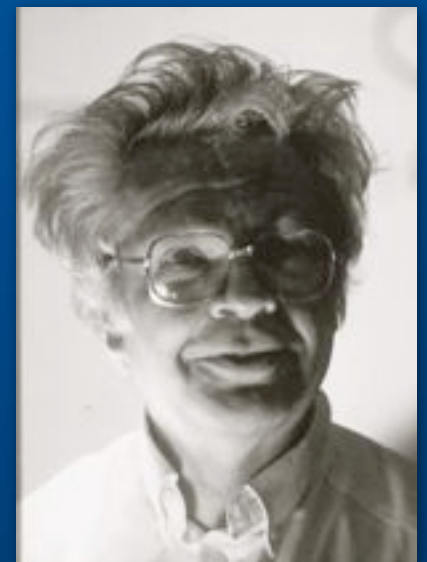
Otto E. Rössler (geb. 1940)

„An Equation for Continuous Chaos“ (1976)

inspiriert durch Betrachtung
einer Knetmaschine



Toffeemaschine wird
immer wieder
gestreckt und gefaltet



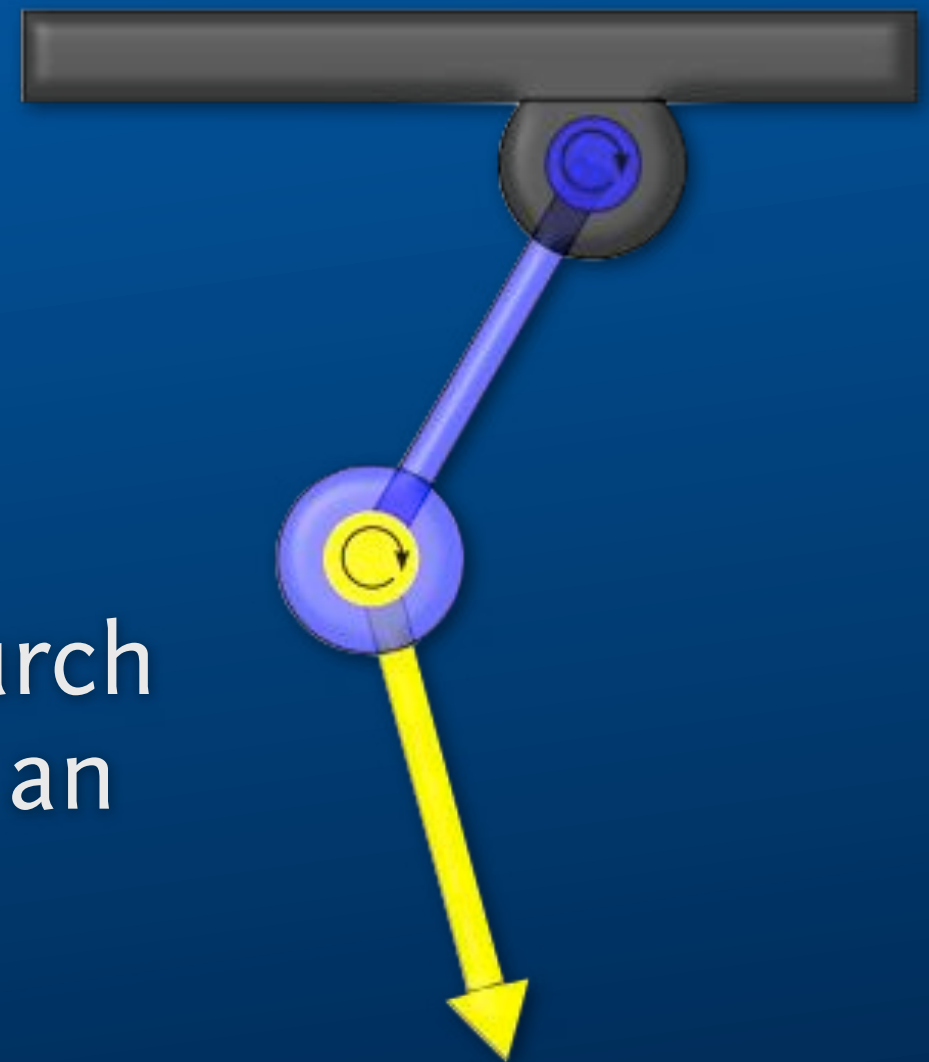
CHAOTISCHE PENDEL

1. Doppelpendel

Idee:

- Phasenraum erweitern
- expansive Trajektorien durch wiederholte Annäherung an Instabilitätslage

4 Dimensionen (jedes Pendel 2)

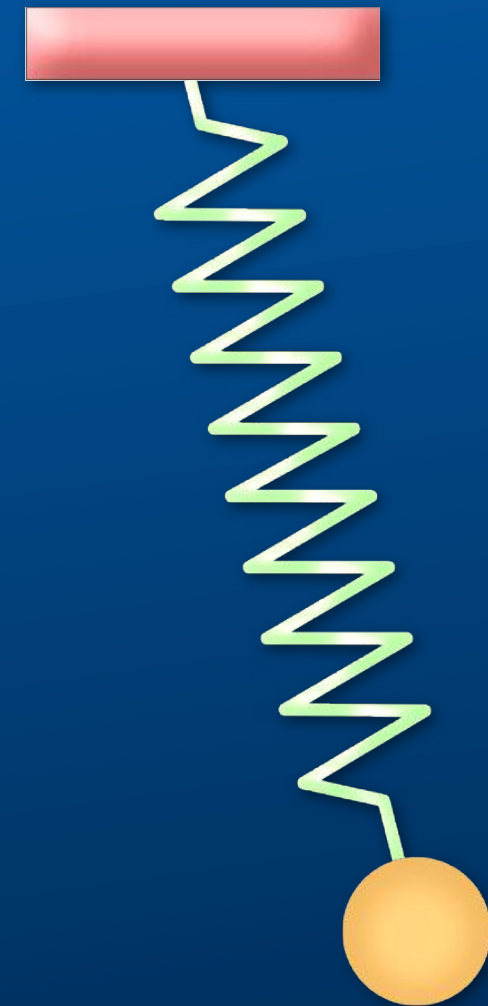


CHAOTISCHE PENDEL

2. Ebenes Federpendel

Idee:

- Phasenraum erweitern
- Nichtlinearität in Rückstellkraft der Feder durch S. v. Pythagoras aufgrund senkrechter Koordinaten



$$F = D \cdot (\sqrt{x^2 + y^2} - l)$$

CHAOTISCHE PENDEL

2. Ebenes Federpendel

Idee:

- Phasenraum erweitern
- Nichtlinearität in Rückstellkraft der Feder durch S. v. Pythagoras aufgrund senkrechter Koordinaten



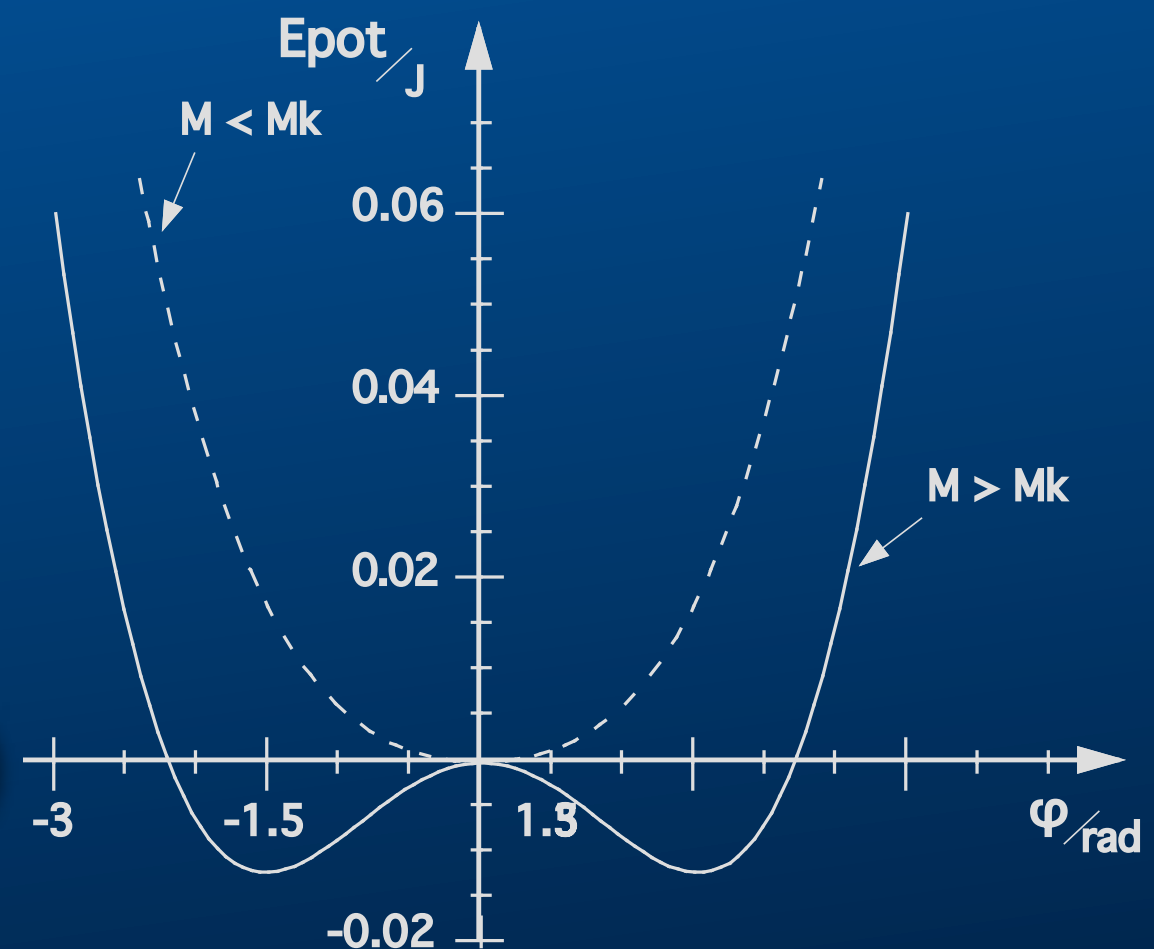
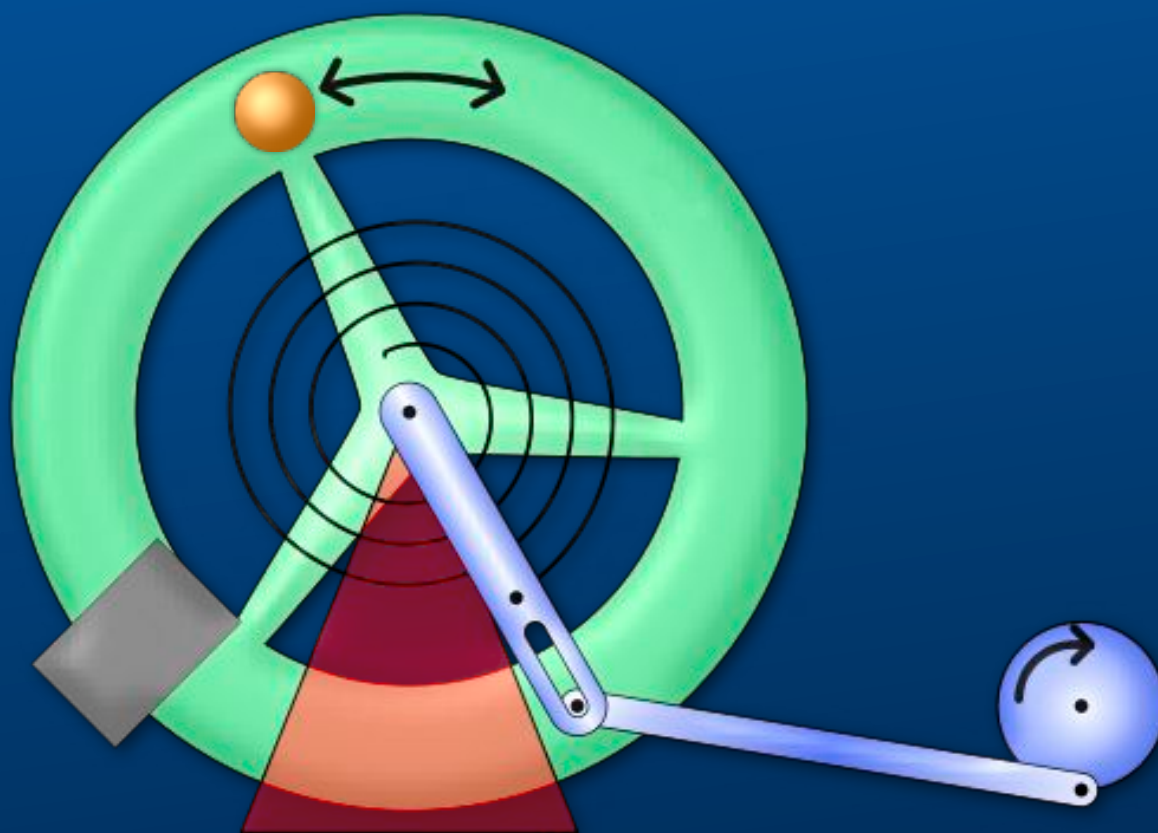
wieder 4 Dimensionen

geht es auch mit 3?

CHAOTISCHE PENDEL

3. Pohlsches Rad mit Zusatzmasse

angetriebenes nichtlineares Drehpendel

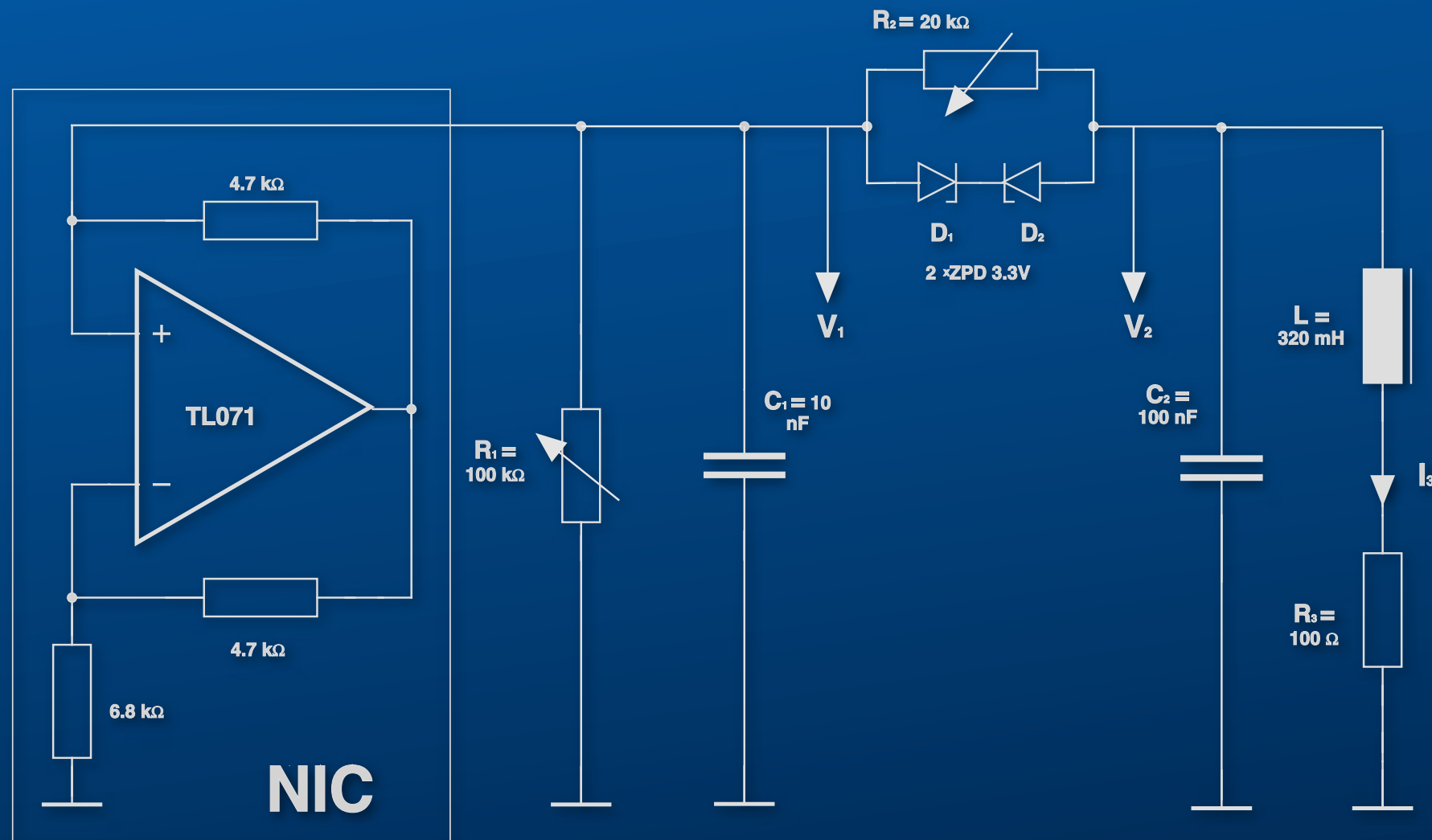


WEITERE BEISPIEL-SYSTEME MIT CHAOTISCHER DYNAMIK

- Karussellpendel, Federstabpendel, Magnetpendel
- Chaotischer Prellball
- tropfender Wasserhahn
- elektronische nichtlineare Oszillatoren
- Billardsysteme mit Rundungen
- Drei-(und mehr-)körperproblem (Astronomie)

DER SHINRIKI-OSZILLATOR

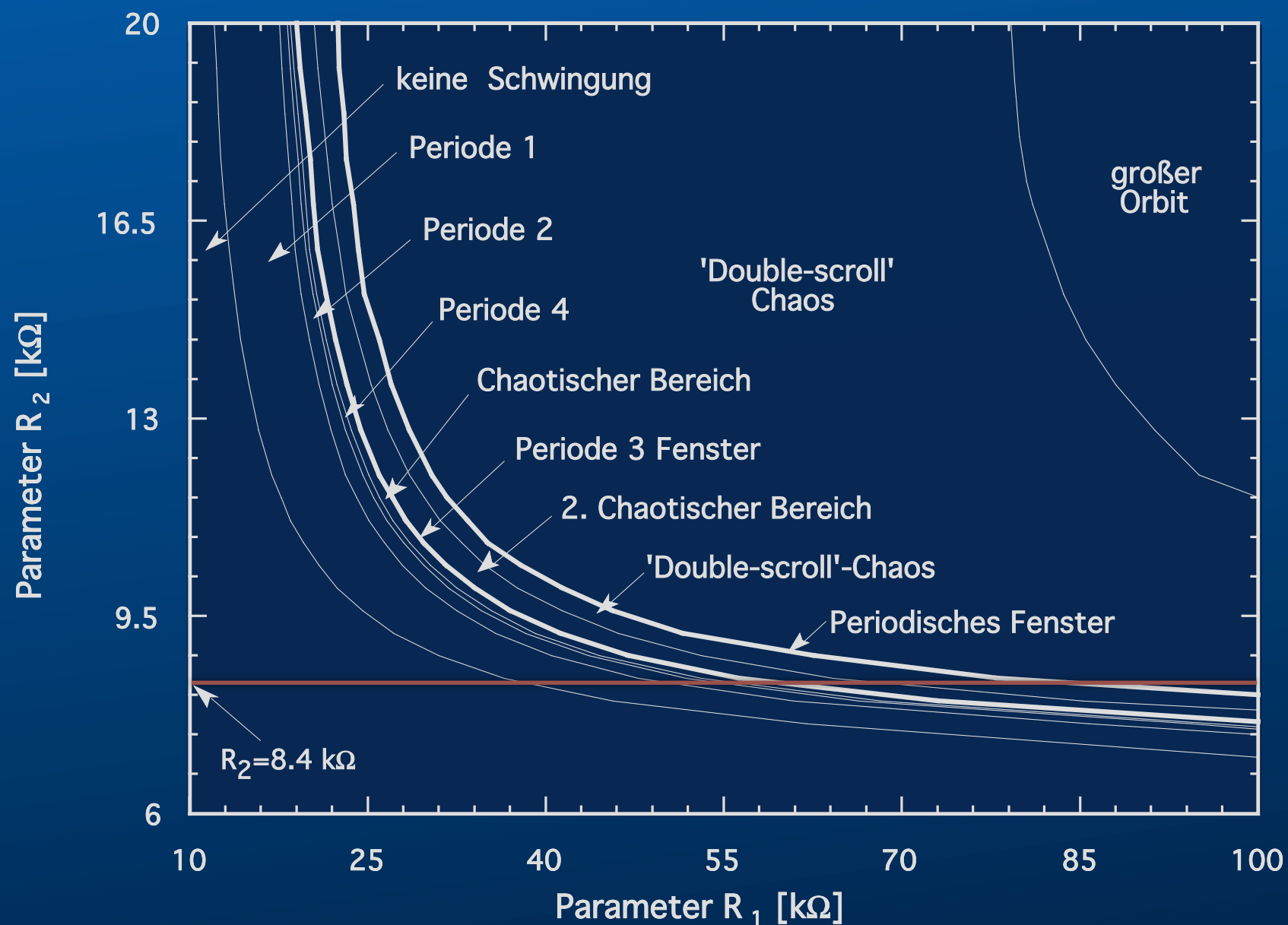
Selbstschwingender nichtlinearer Schwingkreis



$$\text{Frequenz: } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 890 \text{ Hz}$$

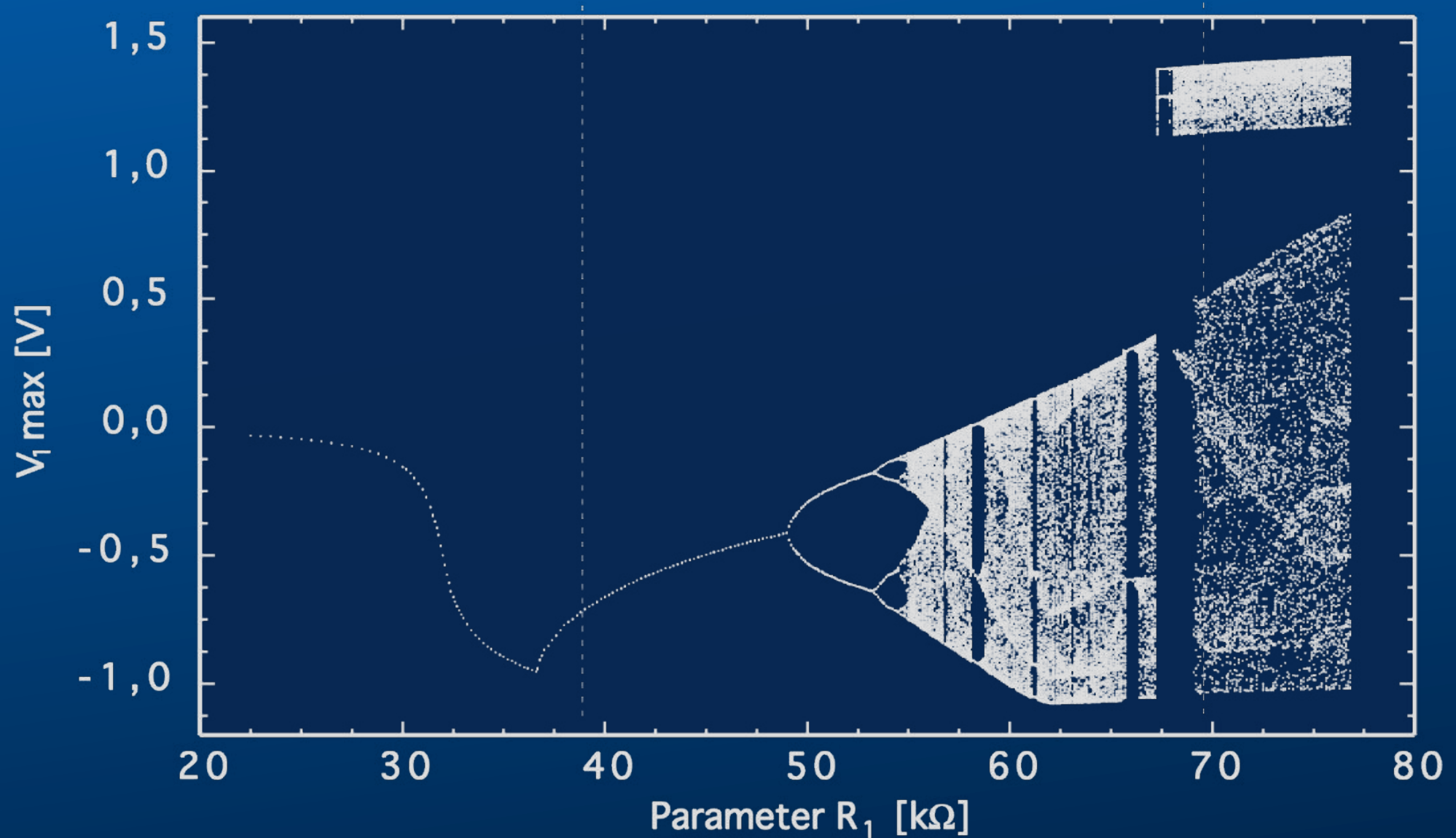
SHINRIKI - ERGEBNISSE

„Landkarte“ der verschiedenen Zustände



SHINRIKI - ERGEBNISSE

Bifurkationsdiagramm



MAGNETPENDEL

Variante eines sphärischen Pendels

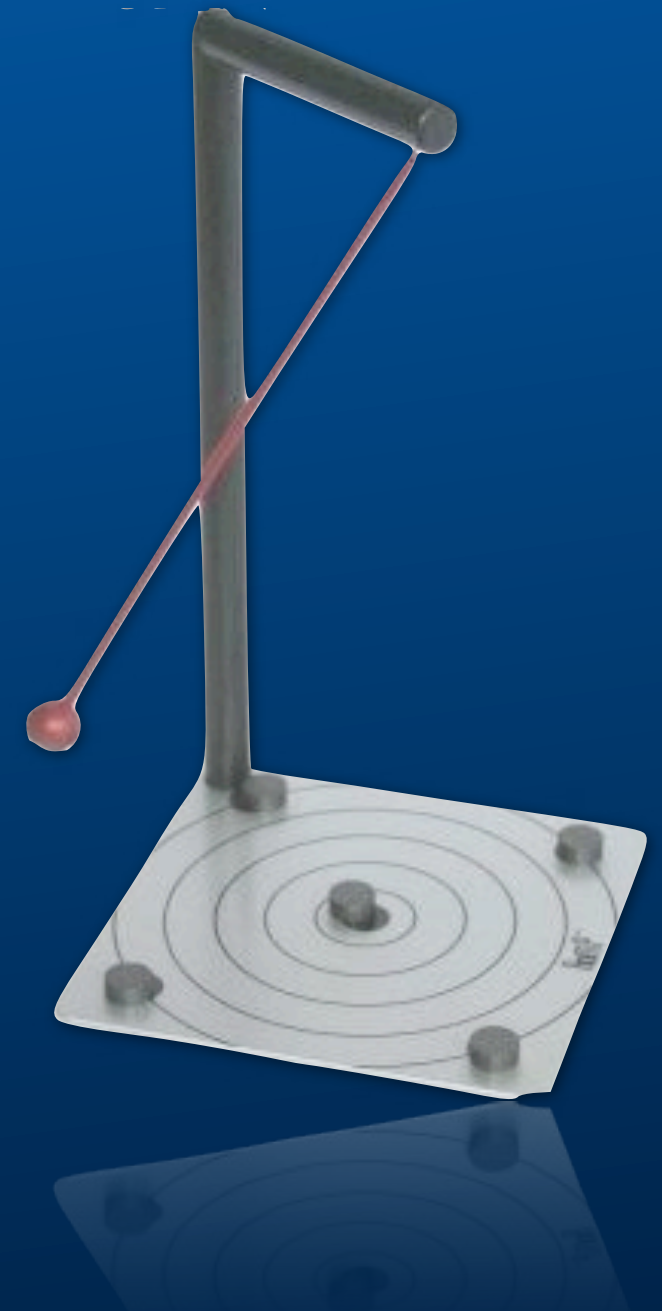
- Das Gewicht am Ende des leichten Stabes ist magnetisch.
- Auf dem Boden sind mehrere Magnete angebracht.

Trajektorienverläufe:



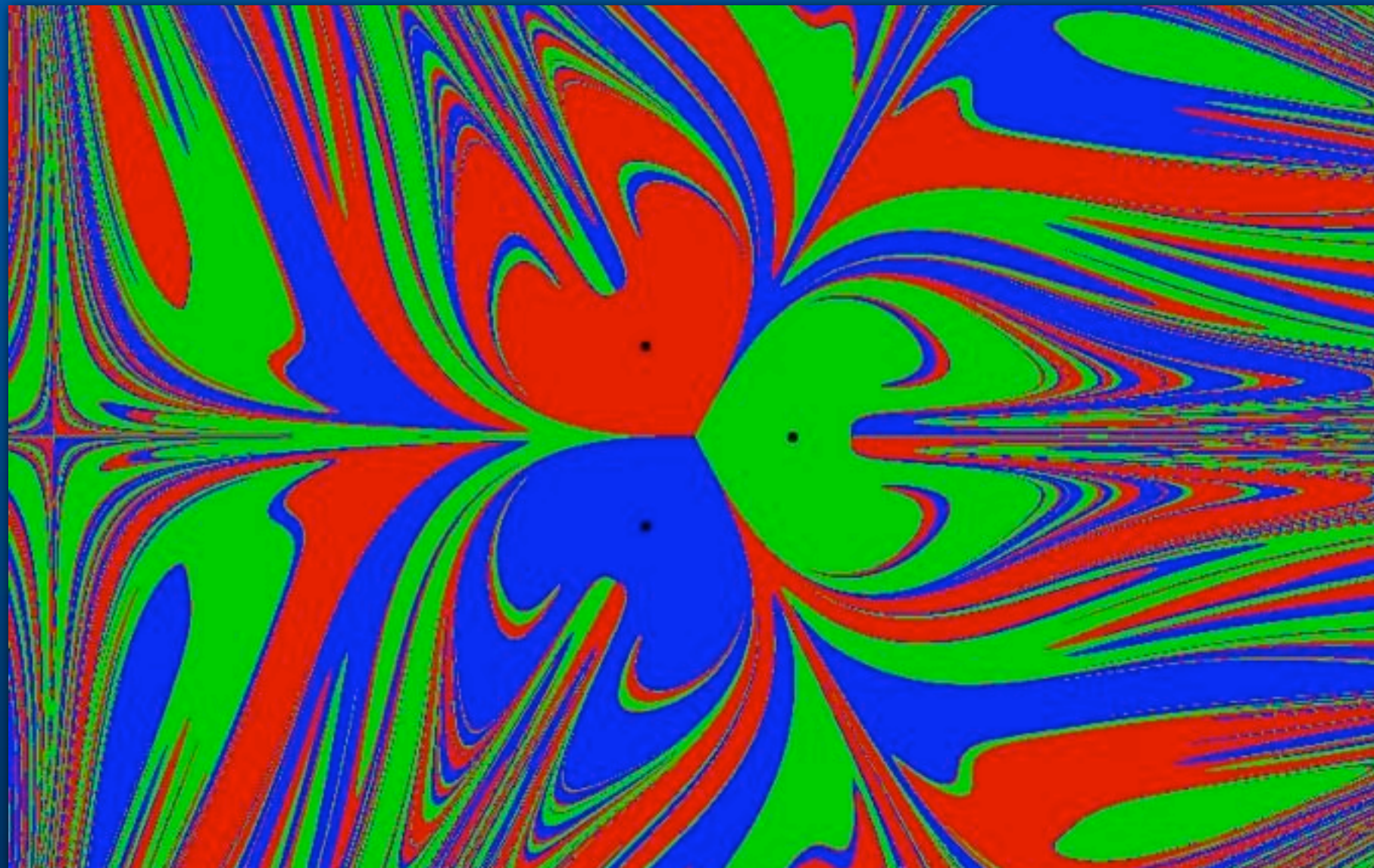
von oben
betrachtet

Farbe des
einfangenden
Magneten



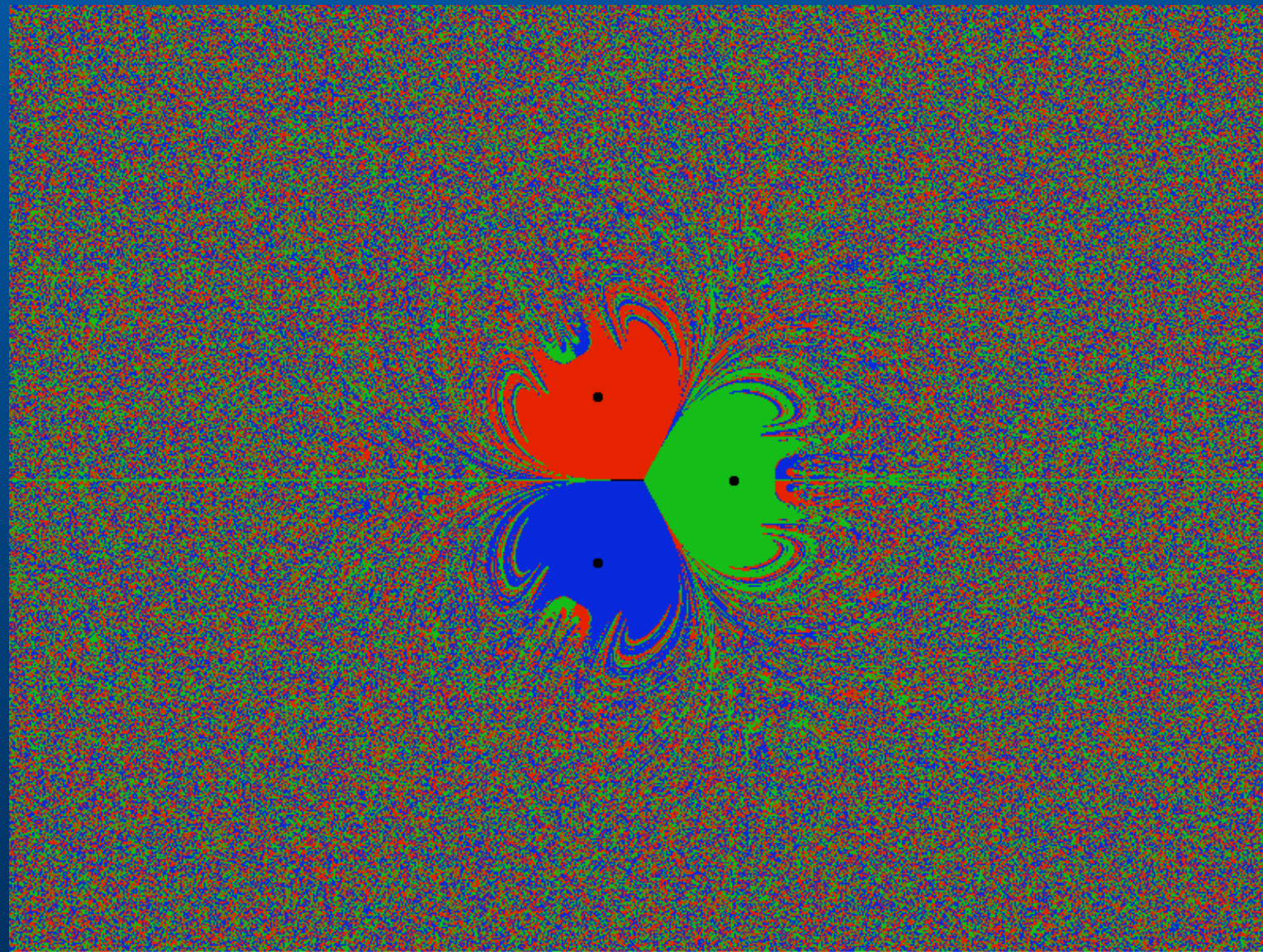
MAGNETPENDEL

Attraktor-Einzugsbereiche - „Bassins“



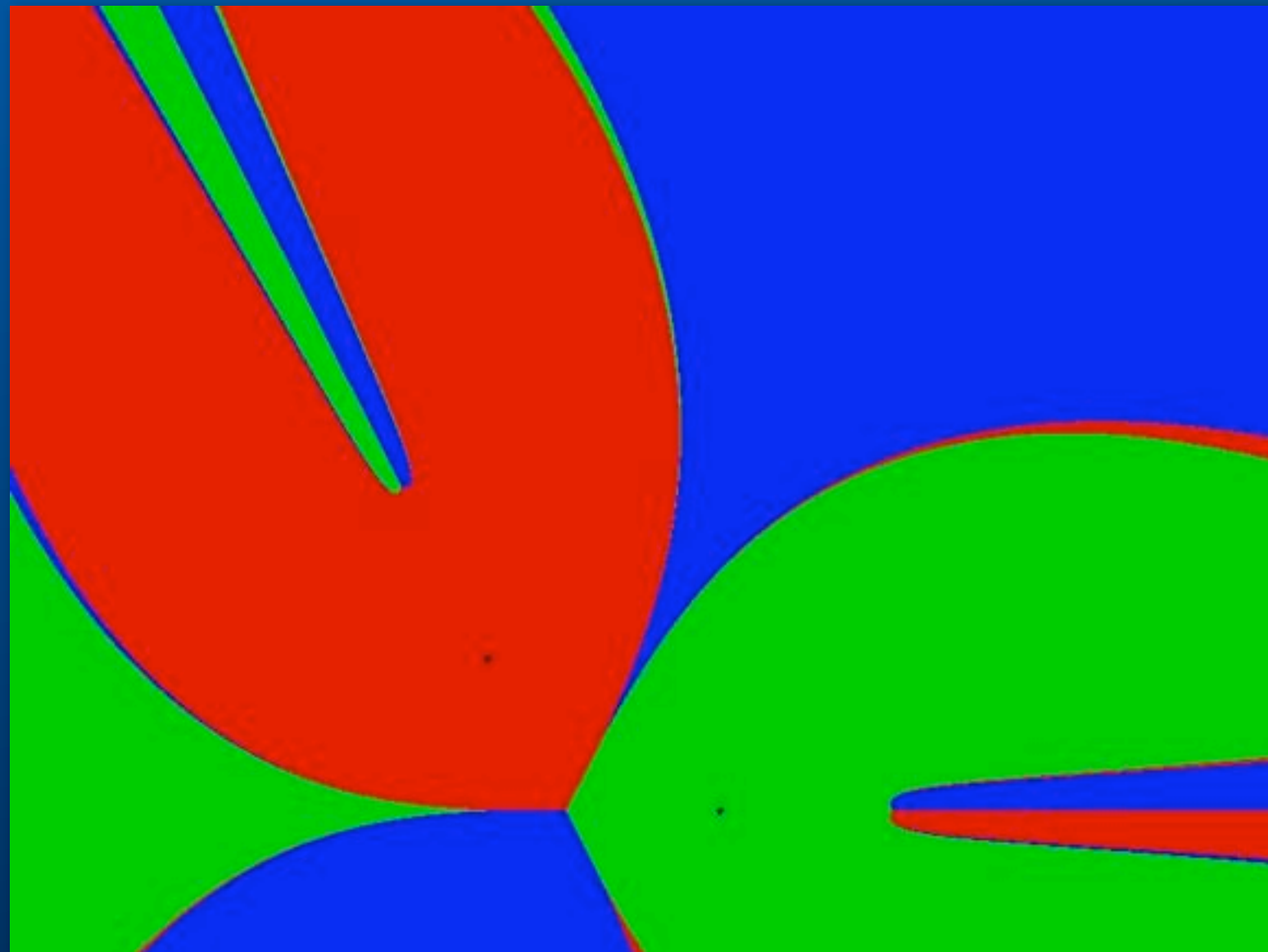
MAGNETPENDEL

Attraktor-Einzugsbereiche - „Bassins“



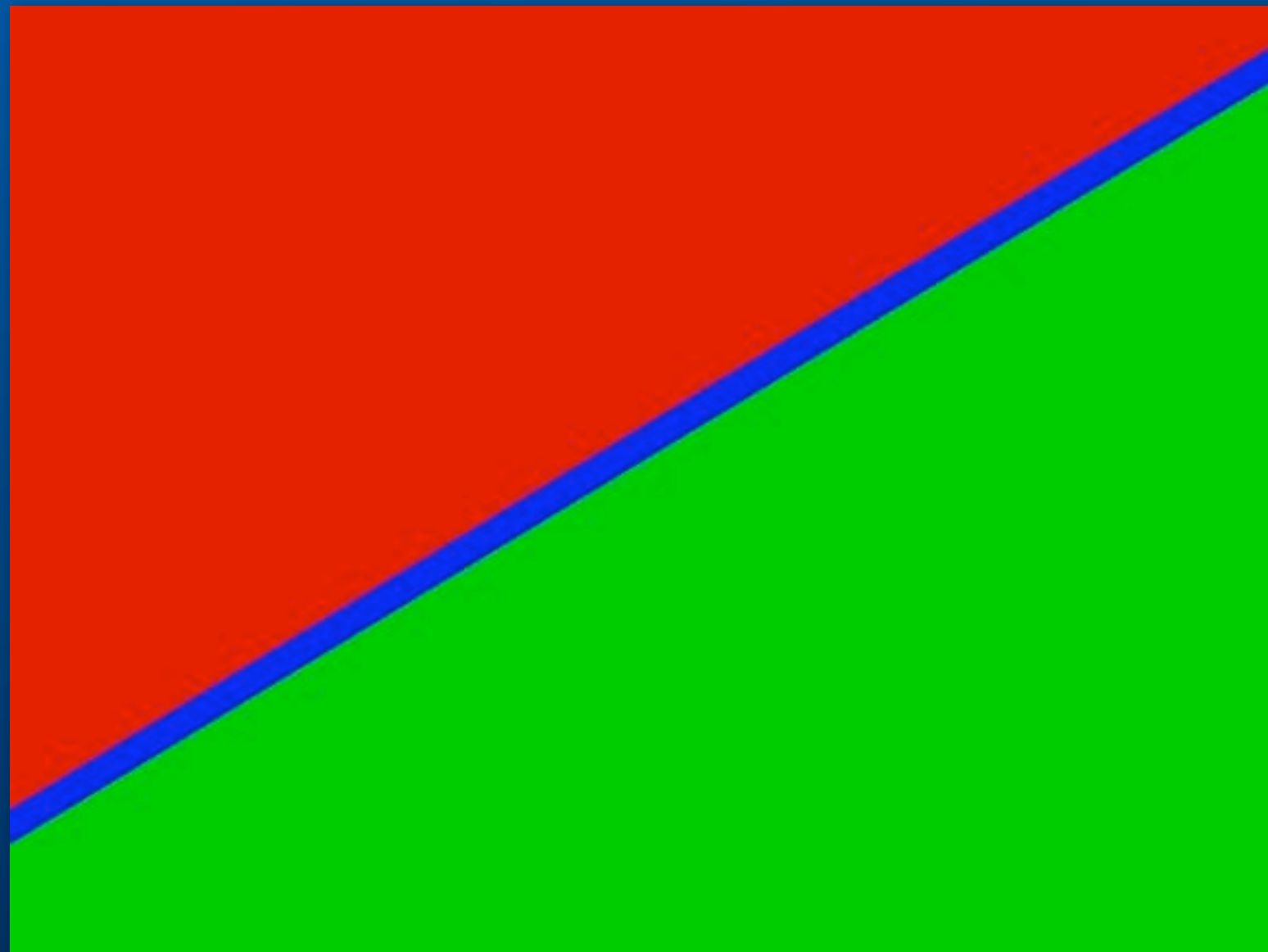
MAGNETPENDEL

Attraktor-Einzugsbereiche - „Bassins“



MAGNETPENDEL

Attraktor-Einzugsbereiche - „Bassins“



BLICK IN DIE FORSCHUNG

Anwendungen der nichtlinearen Dynamik in

Physik komplexer Systeme, Astronomie,
Chemie (Reaktionskinetik),
Medizin (Herz, Gehirn, Epillepsie...),
Geologie (Erdbebenvorhersage),
Wirtschaftswissenschaften (Börsenkurse)

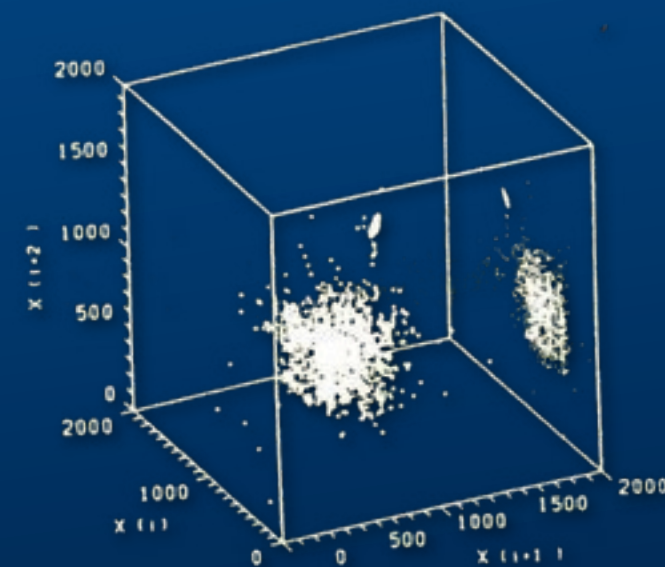
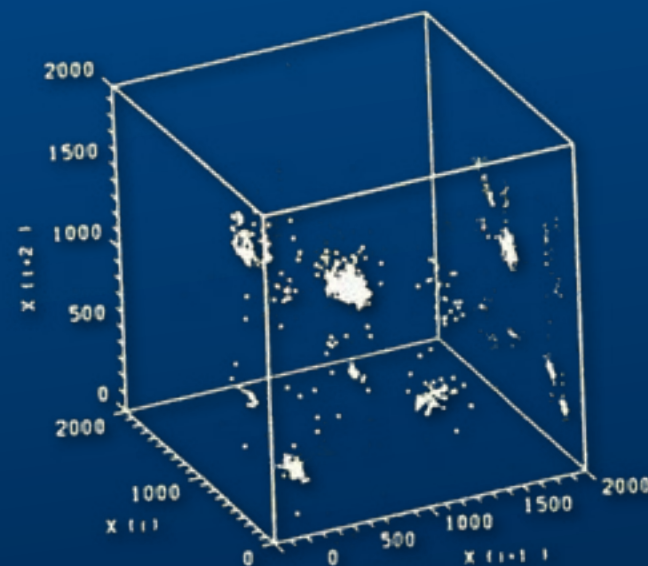
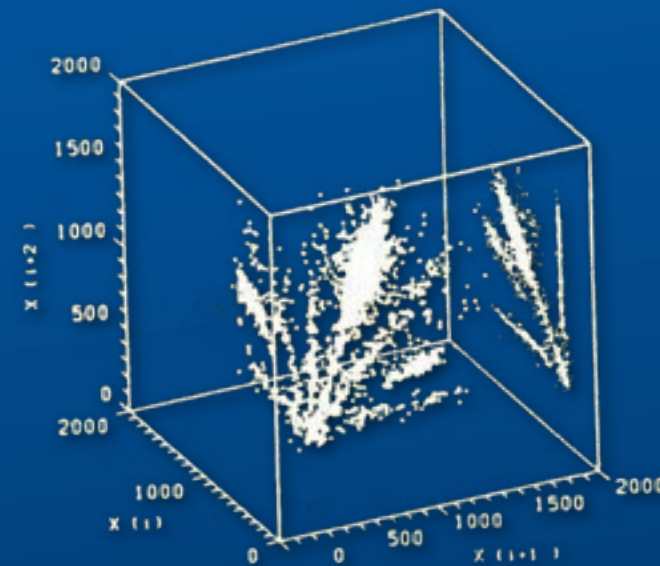
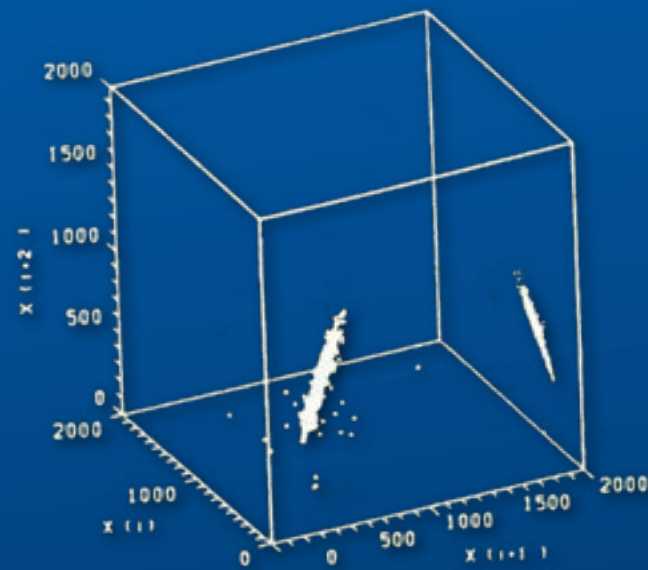
Zeitserienanalyse

Chaos-„Kontrolle“

Grundsätzliche Fragestellungen

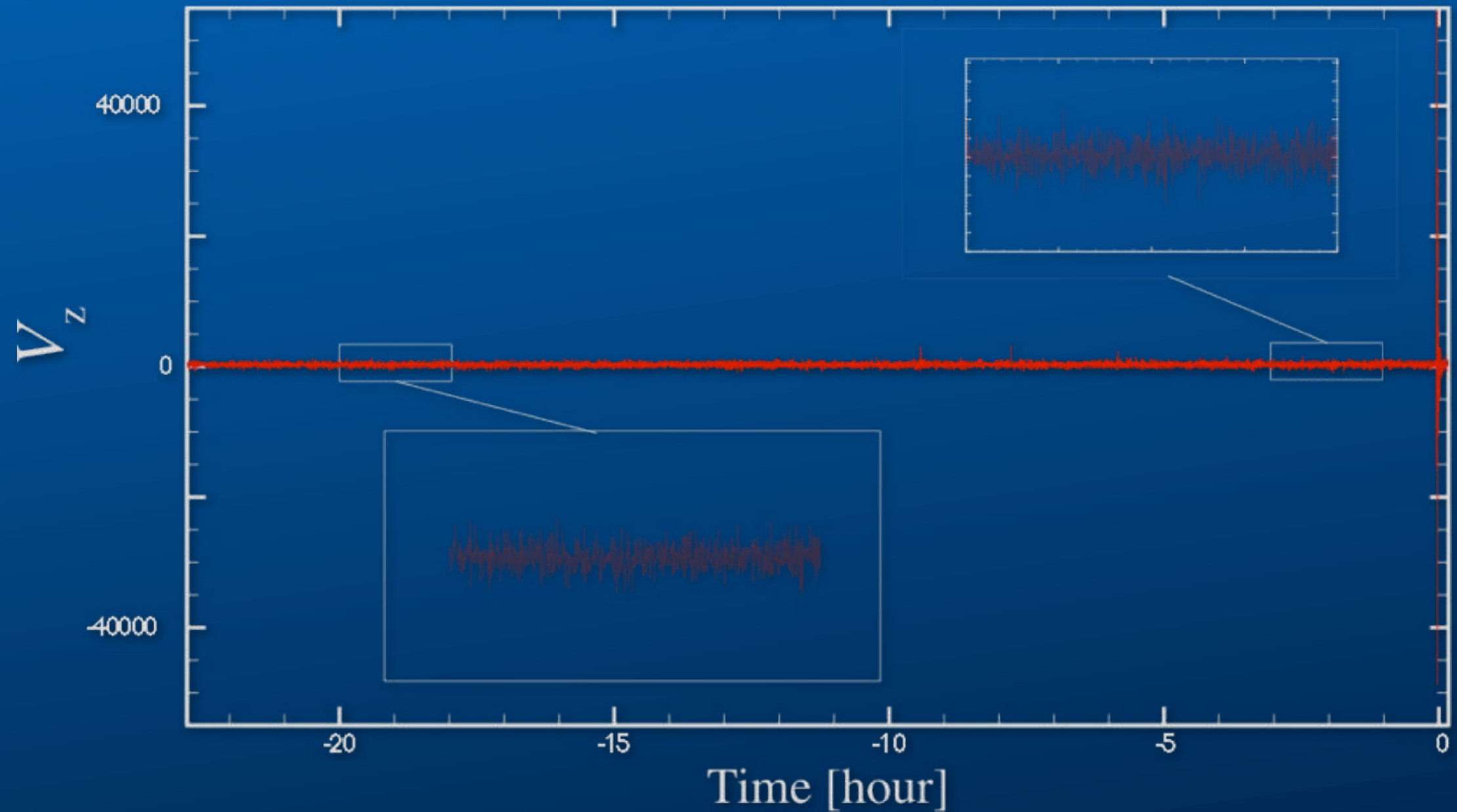
BEISPIEL AUS MEDIZIN - HERZ

Untersuchung an Langzeit-Elektrokardiogrammen (EKGs)



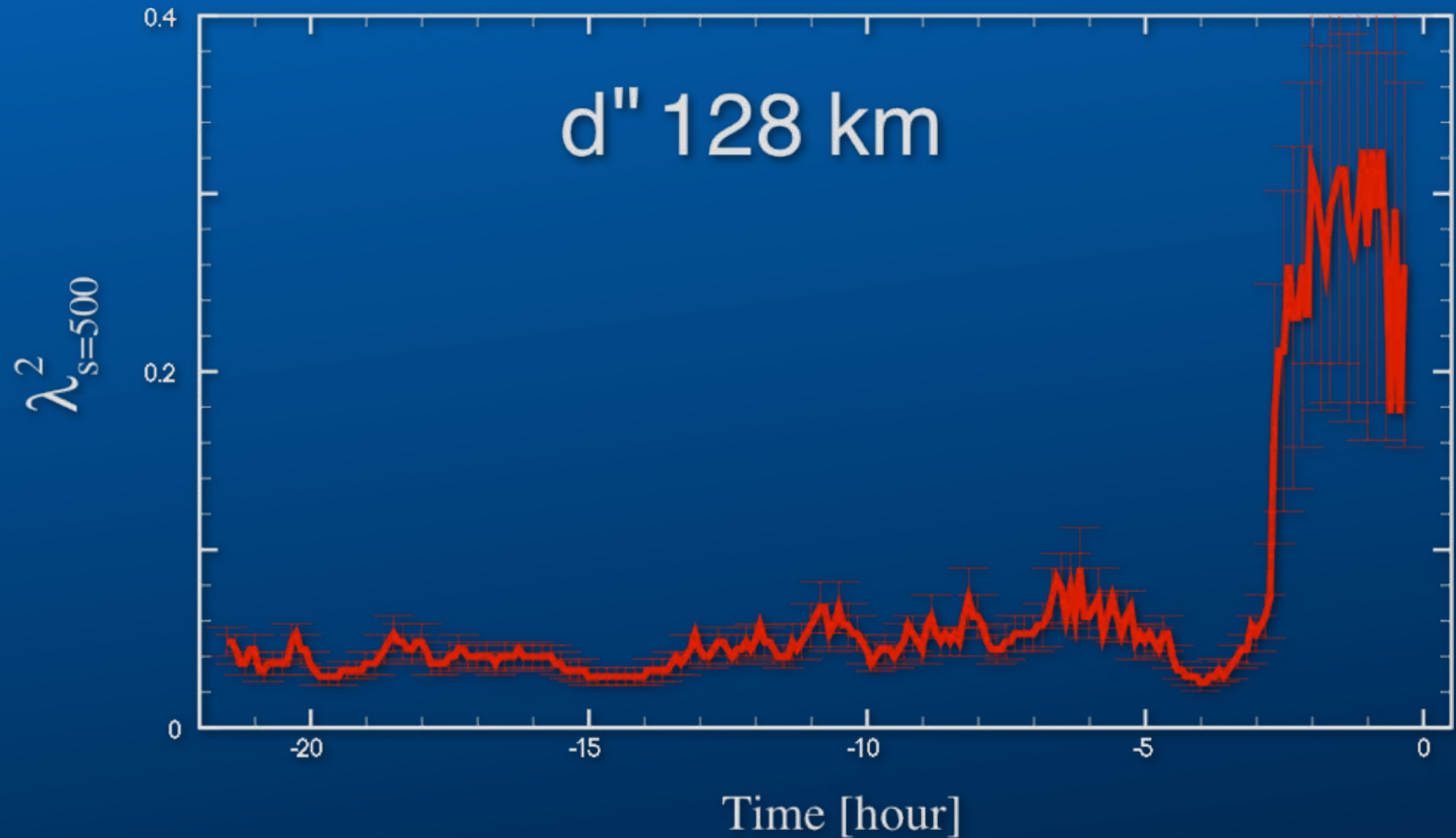
G.E. Morfill et al. (1994) MPI Garching

ERDBEBENDATEN



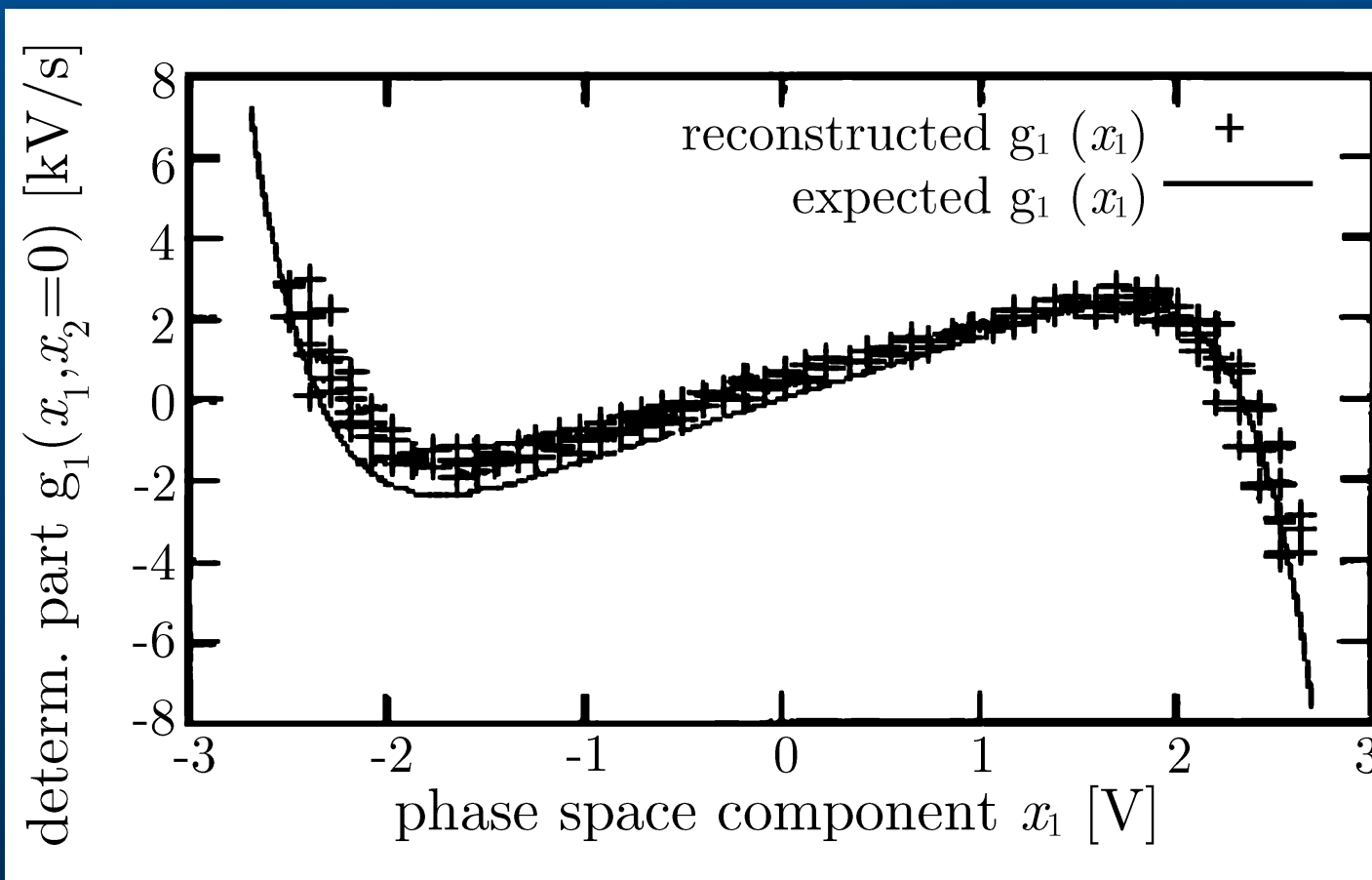
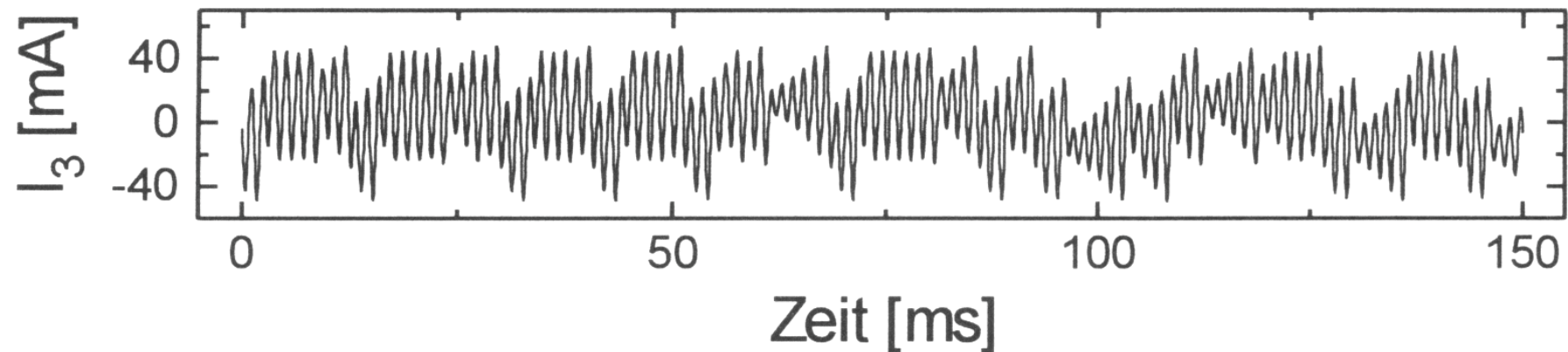
Manshour, Saberi, Muhammad Sahimi, Peinke, Amalio, Pacheco, and Tabar - PRL 102, 014101 (2009)

ERDBEBENDATEN



Manshour, Saberi, Muhammad Sahimi, Peinke, Amalio, Pacheco, and Tabar - PRL 102, 014101 (2009)

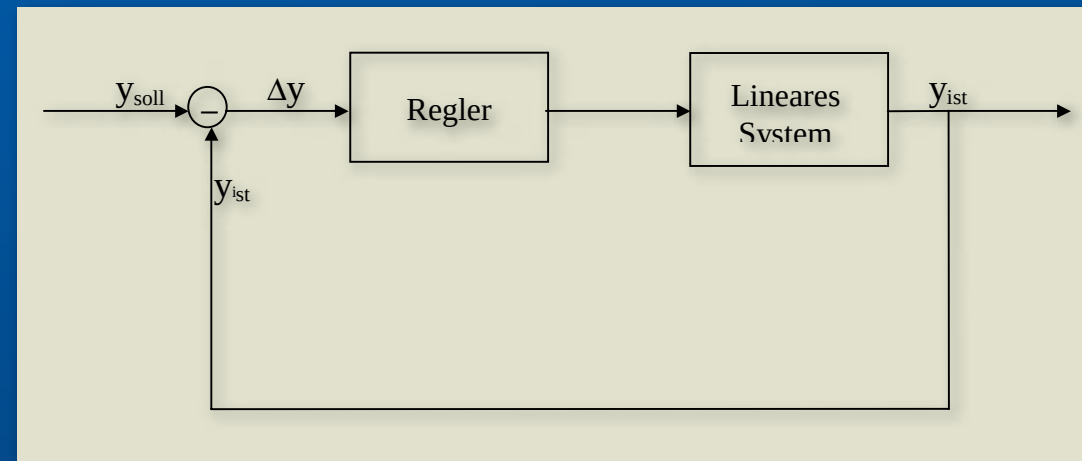
ZEITSERIENANALYSE



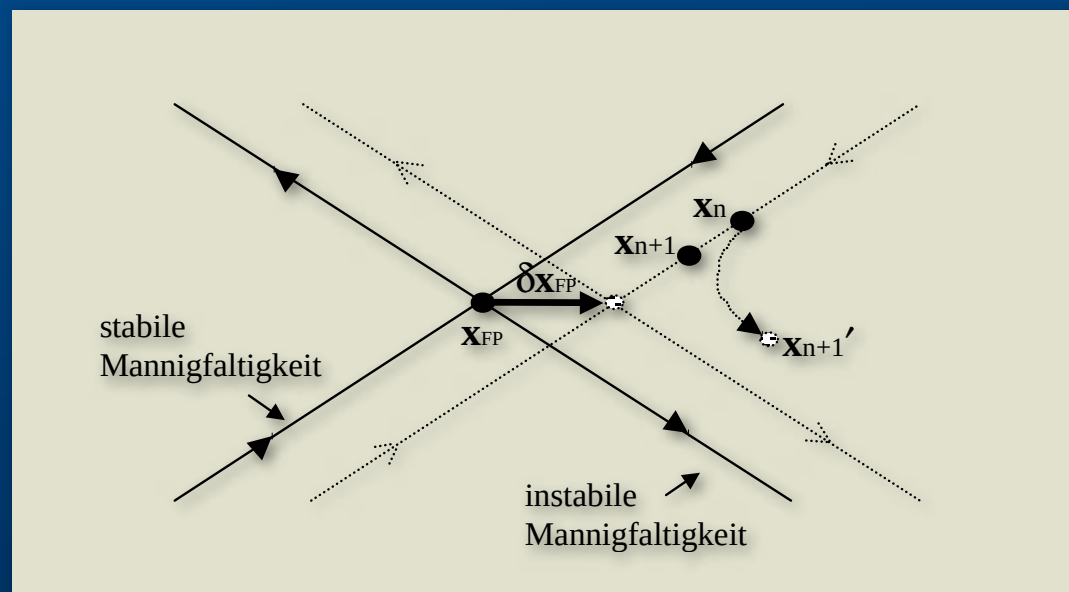
R. Friedrich, S. Siegert, J. Peinke, St. Lück, M. Siefert, M. Lindemann, J. Raethjen,
G. Deuschl und G. Pfister - Physics Letters A, 271,217-222 (2000)

CHAOS-„KONTROLLE“

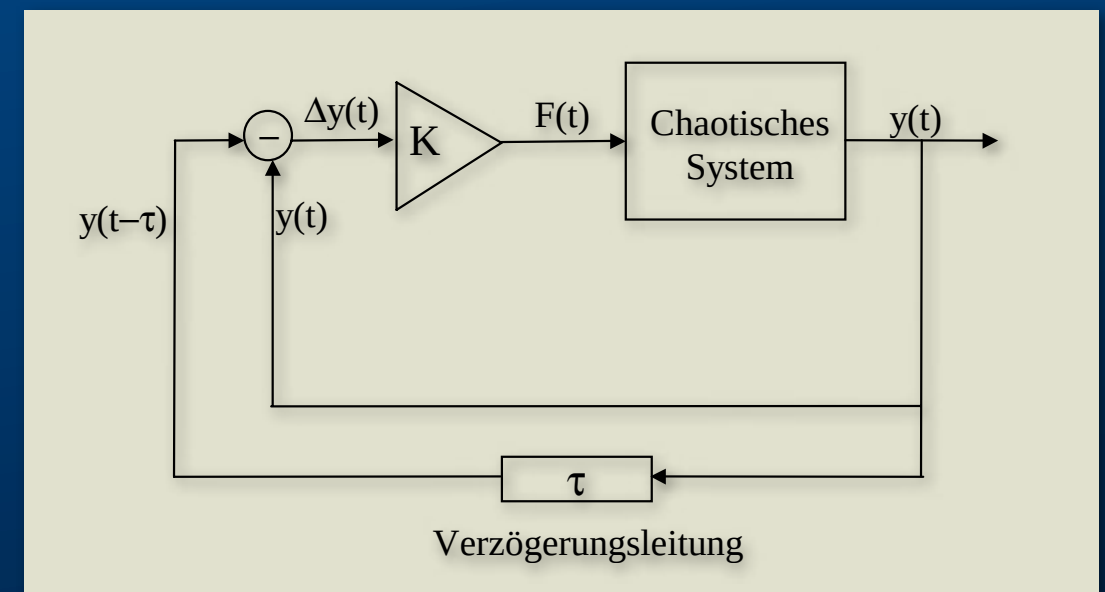
„normaler“
Regelkreis



Methode I (OGY)

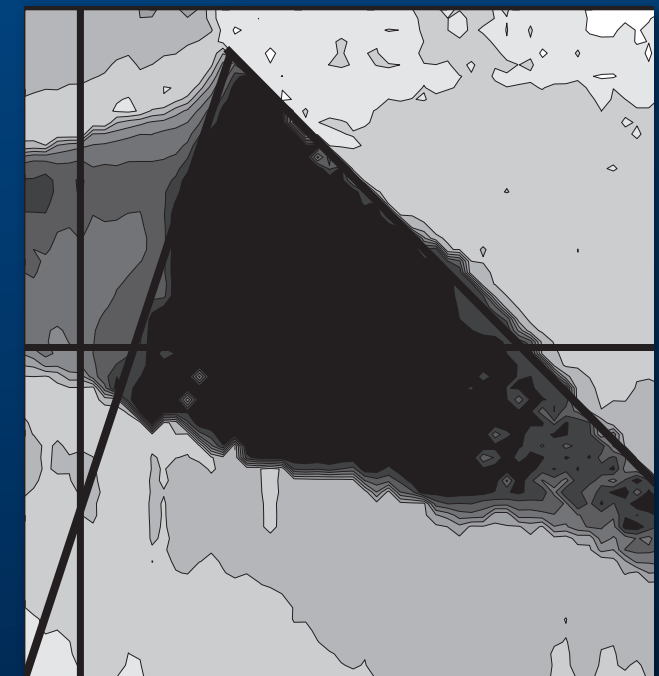
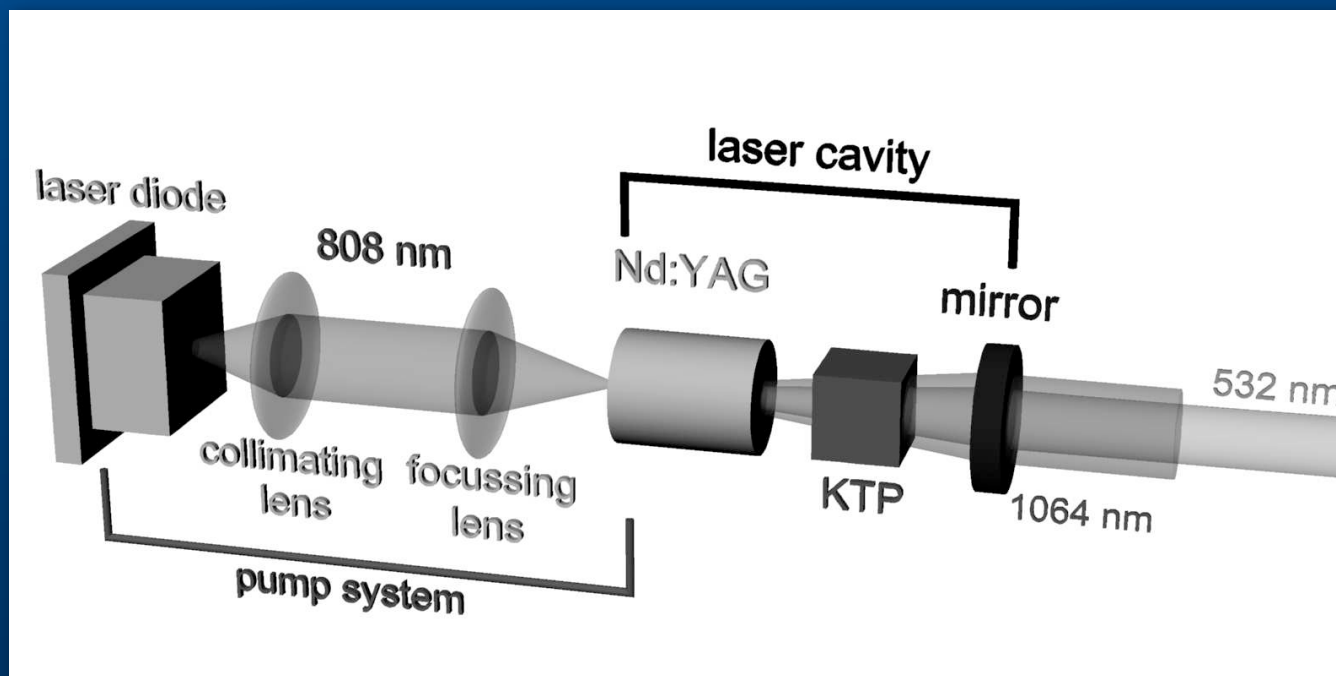
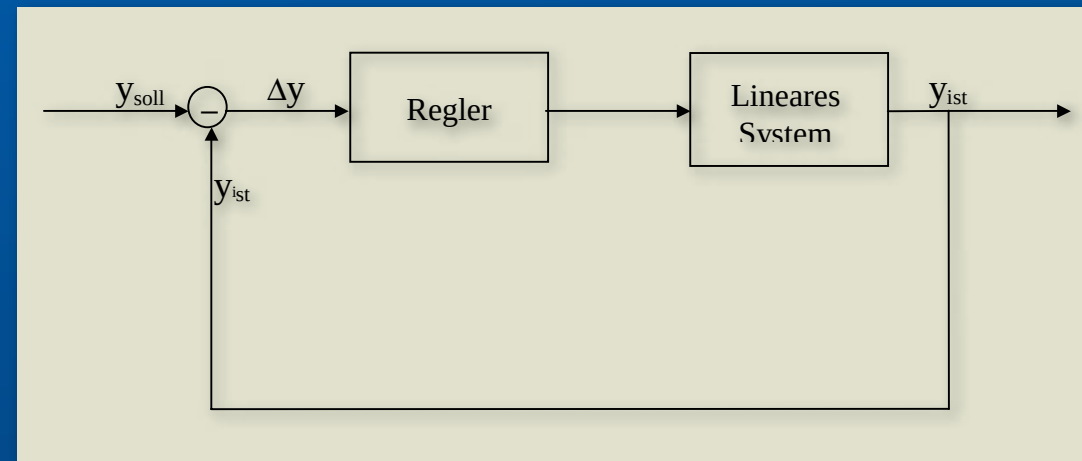


Methode II (Pyragas)



CHAOS-„KONTROLLE“

„normaler“
Regelkreis



F. Lange, T. Letz, K. Pyragas, A. Kittel - Stabilization of the output power of intracavity frequency-doubled lasers (2003)

WO STEHT DIE NICHTLINEARE DYNAMIK?

«Bei der Chaosforschung handelt es sich lediglich um eine neue Betrachtung 'alter Hüte', die zwar viel Verwirrung produziert, aber nichts Neues hervor bringt.»



«Die Entdeckung des deterministischen Chaos hat eine Revolution im wissenschaftlichen Denken geliefert, die in etwa mit der bei der Quantenmechanik vergleichbar ist.»



WO STEHT DIE NICHTLINEARE DYNAMIK?

„Einfache Systeme“

starke Kausalität (Linearisierung)
periodische, wiederholbare



„Echt komplexe Systeme“

schwache Kausalität & hochdim.
Turbulenz, stochastische Systeme



WO STEHT DIE NICHTLINEARE DYNAMIK?



stark kausales / be-
rechenbares Verhalten

Ziel: komplexes
Verhalten der Natur
beschreiben

DAS WAR'S

**Vielen Dank für
Ihre Aufmerksamkeit!**

Informationen und Materialien
demnächst
auf folgender Website:

<http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/>