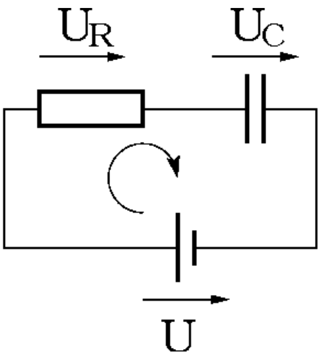
Übungen zur Einführung in die Physik II (Nebenfach)

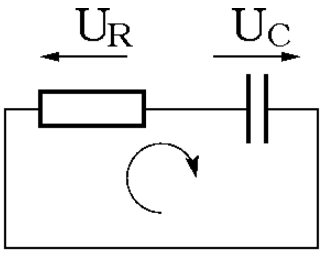
--- Musterlösung ---

Aufgabe: *Kondensatorentladung*
Ein mit Glimmer ($\varepsilon_r = 8$) gefüllter Plattenkondensator mit der Fläche $A=16\ cm^2$ und einem Plattenabstand $d = 25\ \mu m$ entlädt sich wegen der Leitfähigkeit des Dielektrikums. Nach *70 s* ist die Ladung des Kondensators auf *1/e* abgesunken.

Ersatzschaltbild



Aufladevorgang



Entladevorgang

Beachte: die Stromflussrichtung kehrt sich um beim Laden und Entladen!

Erstellen Sie ein Ersatzschaltbild für die Kondensatoraufladung, leiten Sie damit die Differentialgleichungen für $Q(t)$, $U(t)$ und $I(t)$ ab und geben Sie die Anfangsbedingungen an.

Betrachte die Spannungen im Kreis (**Maschenregel**)
Es treten 3 Spannungen (U, U_R, U_C) auf, zu beachten sind die unterschiedlichen Orientierungen bzgl. des gewählten Umlaufsinn, d.h. U_R und U_C sind positiv, U ist negativ!

→ $$U + U_R + U_C = 0 \qquad (U<0\ !) \qquad (1)$$

U_R und U_C lassen sich mit Hilfe der Bauteile, über denen sie abfallen, folgendermaßen ausdrücken:

→ $$U_R(t) = R \cdot I(t)$$ $$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad (U_R>0 \Rightarrow I>0\ !) \qquad (2)$$

Damit ergibt sich in (1) eingesetzt:

$$\rightarrow \qquad U + R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \qquad (3)$$

Mit der Definition des elektrischen Stroms als Änderung der Ladung pro Zeit:

$$\rightarrow \qquad I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t) \qquad (4)$$

erhält man die **Differentialgleichung für die Ladung *Q*** durch Einsetzen in (3):

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{U + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0}} \qquad (U<0\ !) \qquad (5)$$

Da der Kondensator am Anfang ungeladen ist, ergibt sich als **Anfangsbedingung**:

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{Q(0) = Q_0 = 0}} \qquad (6)$$

Aus der Differentialgleichung für Q gewinnt man durch Ableiten nach der Zeit:

$$\rightarrow \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(U + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C}\right) = 0 \\ &R \cdot \frac{d}{dt}\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}Q(t) = R \cdot \ddot{Q}(t) + \frac{1}{C}\dot{Q}(t) = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Und mit Gleichung (4) erhält man die **Differentialgleichung für den Strom *I***:

$$\rightarrow \qquad \underline{\underline{R \cdot \dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C} = 0}} \qquad (8)$$

Die **Anfangsbedingung** erhält man aus der Überlegung, welcher Strom direkt im Augenblick des Ladebeginns fließt. Hier ist der Kondensator noch völlig ungeladen ($U_C(0)=0$), d.h. mit Gleichungen (1) und (2) gilt:

$$\rightarrow \qquad \begin{aligned} &U + U_R(0) + 0 = 0 \\ &U + R \cdot I(0) = 0 \\ &\underline{\underline{I(0) = I_0 = \frac{-U}{R}}} \end{aligned} \qquad (U<0 \Rightarrow I_0>0\ !) \qquad (9)$$

Um eine Beziehung für U_C aufzustellen, formt man zunächst Gleichungen (1), (2) und (4) folgendermaßen um (alternativ kann man auch (2) in (3) einsetzen):

$$U + U_R(t) + U_C(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad U + R \cdot I(t) + U_C(t) = 0 \qquad (10)$$

$$U + R \cdot \frac{d}{dt} Q(t) + U_C(t) = 0$$

Nochmalige Anwendung der Beziehung in Gleichung (2) liefert dann die gesuchte **Differentialgleichung für die Spannung U_C**:

$$U + R \cdot \frac{d}{dt}\left(C \cdot U_C(t)\right) + U_C(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad U + RC \cdot \frac{d}{dt}\left(U_C(t)\right) + U_C(t) = 0 \qquad (U<0\ !) \qquad (11)$$

$$\underline{\underline{U + RC \cdot \dot{U}_C(t) + U_C(t) = 0}}$$

Die **Anfangsbedingung** erhält man aus den Gleichungen (2) und (6):

$$U_C(0) = \frac{Q(0)}{C}$$

$$\rightarrow \qquad (12)$$

$$\underline{\underline{U_C(0) = U_{C,0} = 0}}$$

Stellen Sie jetzt die Differentialgleichungen für die Entladung auf (mit Ersatzschaltbild!) einschließlich Anfangsbedingungen.

Der Entladefall unterscheidet sich vom Ladefall dadurch, dass die Spannungsquelle nicht mehr im Kreis enthalten ist.

Als Erstes wendet man auch hier wieder die Maschenregel an:

$$\rightarrow \quad U_R + U_C = 0 \qquad (U_R<0\ !) \qquad (13)$$

Analog zu den Gleichungen (5), (8) und (11) kann man damit die **drei Differentialgleichungen** herleiten:

$$\underline{\underline{\dot{Q}(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = 0}}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0}} \qquad (14)$$

$$\underline{\underline{\dot{U}_C(t) + \frac{1}{RC} U_C(t) = 0}}$$

Die **Anfangsbedingung für U_C** ergibt sich aus der Spannung, mit der der Kondensator zuvor aufgeladen wurde. Er wurde solange aufgeladen, bis seine Spannung U_C die Spannung U der Spannungsquelle kompensiert:

→ $\underline{\underline{U_C(0) = U_{C,0} = -U}}$ ($U<0 \Rightarrow U_{C,0}>0$!) (15)

Die **Anfangsbedingung für I** ergibt sich auf Gleichungen (2), (13) und (15):

→ $$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{-U_C(t)}{R}$$
$$\underline{\underline{I(0) = I_0 = \frac{-U_{C,0}}{R} = \frac{U}{R}}}$$
($U<0 \Rightarrow I_0<0$!) (16)

Anm.: Der Strom fließt beim Entladen natürlich entgegengesetzt zum Ladevorgang!

Die **Anfangsbedingung für Q** lässt sich mit (2) und (15) angeben:

→ $\underline{\underline{Q(0) = Q_0 = C \cdot U_{C,0} = -C \cdot U}}$ ($U<0 \Rightarrow Q_0>0$!) (17)

Geben Sie die Lösungen der Gleichungen für die Entladung an.

Die Lösung für eine Differentialgleichung des Typs $\dot{x} + C \cdot x = 0$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ lautet:

→ $x(t) = x_0 \cdot e^{-C \cdot t}$ (18)

Daraus folgen die **drei Lösungen für die Differentialgleichungen** aus (13) mit den Anfangsbedingungen aus (14), (15) und (16):

→ $$\underline{\underline{Q(t) = -C \cdot U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$
$$\underline{\underline{I(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$
$$\underline{\underline{U_C(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

$U < 0 \Rightarrow Q > 0$
$U < 0 \Rightarrow I < 0$
$U < 0 \Rightarrow U_C > 0$
(19)

Wie groß ist die Kapazität, der Widerstand und der spezifische elektrische Widerstand der Anordnung?

Die **Kapazität** eines Plattenkondensators lässt sich nach folgender Formel berechnen:

→ $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \approx \underline{\underline{4{,}5nF}}$ (20)

Aus der Kenntnis, dass die Kondensatorladung nach *70s* auf *1/e* der ursprünglichen Ladung abgefallen ist, ergibt sich mit Gleichung (13) für *Q*:

$$\rightarrow \qquad Q(70s) = Q_0 \cdot e^{-\frac{70s}{RC}} = \frac{1}{e} \cdot Q_0 = Q \cdot e^{-1} \qquad (21)$$

Und daraus lässt sich mit Gleichung (19) durch Vergleich der Exponenten der **Widerstand** berechnen:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{70s}{RC}} = e^{-1} \\ \rightarrow \qquad & \frac{70s}{RC} = 1 \qquad (22) \\ & \underline{\underline{R = \frac{70s}{C} \approx 1{,}56 \cdot 10^{10}\,\Omega}} \end{aligned}$$

Der **spezifische elektrische Widerstand** der Anordnung ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} & R = \rho \frac{d}{A} \\ \rightarrow \qquad & \qquad (23) \\ & \underline{\underline{\rho = \frac{R \cdot A}{d} \approx 9{,}98 \cdot 10^{11}\,\Omega m}} \end{aligned}$$

Wie lange dauert es, bis sich der Kondensator zur Hälfte entladen hat?

Diesmal ist die Zeit gesucht, nach der die Ladung auf ½ der ursprünglichen Ladung abgefallen ist. Damit ergibt sich aus Gleichung (13):

$$\rightarrow \qquad Q(t_{1/2}) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2} \cdot Q_0 \qquad (24)$$

Mit *RC*=*70s* aus Gleichung (21) erhält man für die **Halbwertszeit**:

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{t_{1/2}}{70s}} = \frac{1}{2} \\ \rightarrow \qquad & -\frac{t_{1/2}}{70s} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \qquad (25) \\ & \underline{\underline{t_{1/2} = 70s \cdot \ln 2 = 48{,}5s}} \end{aligned}$$

Literatur: Metzler, Physik: J. Grehn, J. Krause, S. 202ff. (Kap. 5.3), 3. Auflage, Schroedel, Braunschweig, 1998 (Verfügbar in der TB Physik)
(In diesem Buch werden ebenfalls die Vorzeichen physikalisch korrekt als Teil der Messgröße behandelt.)